9 R 1

GULIELMI WHISTON

PRÆLECTIONES PHYSICO-MATHEMATICÆ

CANTABRIGIÆ

In Scholis Publicis Habitæ.

PRÆLECTIONES
PHYSICO-MATHEMATICÆ
CANTABRIGIÆ
In Scholis Publicis Habitæ.

QUIBUS

Philosophia Illustrissimi NEWTONI *Mathematica*
Explicatius traditur, & facilius Demonstratur:
COMETOGRAPHIA etiam HALLEIANA
Commentariolo illustratur.

A GULIELMO WHISTON, A.M.
Et Matheseos Professore Lucasiano.

In Usum Juventutis Academicæ.

CANTABRIGIÆ,

Typis ACADEMICIS.

LONDINI, Impensis BENJ. TOOKE Bibliopolæ, juxta Medii Templi Portam, in vico vulgo vocato *Fleet-street.* A.D. M.DCC,X.

PRÆLECTIONES PHYSICO-MATHEMATICÆ CANTABRIGIÆ In Scholis Publicis Habitæ.

QUIBUS

Philosophia Illustrissimi *NEWTONI Mathematica* Explicatius traditur, & facilius demonstratur:

COMETOGRAPHIA etiam HALLEIANA Commentariolo illustratur.

A *GULIELMO WHISTON*, A.M. Et Matheseωs Professore *Lucasiano*.

In Usum Juventutis Academicæ.

CANTABRIGIÆ,

Typis ACADEMICIS.

LONDINI, Impensis BENJ. TOOKE Bibliopolæ, juxta Medii Templi Portam, in vico vulgo vocato *Fleet-street*. A.D. M.DCC.X.

7

Philosophia Mathematica.

PRÆLECTIO I.

ABSOLUTIS olim pure Astronomicis, ad Operis nostri partem alteram, *Philosophiam* nempe Cl. Newtoni *Mathematicam* accedendum. In animo enim est Viri istius longe Maximi vestigia premere, & præcipua ejusdem nobilissimaque inventa Philosophica, faciliori methodo exponere; ut ita tandem Philosophia Newtoni plane divina pluribus, & vel in mathesi mediocriter versatis innotescat; nec intra privatos summorum Geometrarum parietes amplius delitescat. Prius autem quam quisquam egregia hæc & prorsus admiranda Philosophiæ Naturalis theoremata aggrediatur, præter aliqualem Geometriæ, Arithmeticæ & Astronomiæ notitiam, necessarium est omnino ut cum veras *Motuum leges*, tum imprimis curvarum linearum quas *Sectiones Conicas* appellamus, naturas & primarias proprietates non ignoret. Visum est ergo in eorum gratiam qui Prima tantum Geometriæ, Arithmeticæ & Astronomiæ Elementa perlegerunt, tam *Conicas Sectiones*, quam nuper demonstratas *Motuum leges* paucis attingere atque illustrare; ne forte quispiam harum rerum penitus ignarus in Cl. Newtoni inventis intelligendis frustra laboret. Quod enim ad primas motuum & collisionum leges attinet, in iis stabiliendis tam miseris erravit modis Cartesius, falsasque reflexionum Regulas orbi tam audacter tradidit, ut præjudiciis inde exortis tollendis vacare operæ pretium haud immerito videatur. Quod vero *Sectiones Conicas* spectat, Pauci adeo ex iis, inferioris nimirum subsellii Mathematicis, in quorum gratiam provinciam hanc suscepi, earum indolem aut

proprietates capiunt, ut nisi hisce subvenire sit animus in cæteris laboriose tradendis operam plerumque atque oleum sim omnino perditurus. Etenim Cum Cl. Newtonus in eo totus sit, ut omnes Systematis nostri Planetas atque Cometas in aliqua sectionum conicarum moveri demonstret, perquam jucundum, quin & admodum necessarium erit curvarum harum generationes atque naturas contemplari paululum atque prælibare. Ut ergo, missâ aliâ præfandi circuitione, Elementa Conica paucis explicare, & ob oculos, omissis tamen hic loci eorundem demonstrationibus, ponere valeam, nonnulla huc spectantia e conicorum scriptoribus, præsertim vero è Clarissimo D. De la Hire mutuò accipere, & pro demonstratis hic loco assumere, non pigebit. Quanquam autem curvæ istæ lineæ per meras in plano delineationes & constructiones, uti fiet inferius, exhiberi possint, tamen quia Geometræ tam antiqui quam neoterici per Coni Sectiones easdem plerumque exposuerunt, & quia istæ curvæ nullo alio modo simul omnes & semel ostendi queant, atque etiam quia mutua singularum habitudo & cognatio quædam vix in altera explicandi forma adeò liquido innotescat, ob hasce, inquam, & hujusmodi rationes Curvarum harum naturas primo per Coni Sectiones, deinde verò per meras quoque in plano delineationes, sine Cono, ostendere operam dabo.

Si sumatur punctum quodvis extra planum, in quo descriptus est circulus, & per hoc punctum immobile recta linea ad utrasque partes puncti immobilis in infinitum producta peripheriæ circuli circumducatur, Superficies ortæ ex motu rectæ singulæ dicuntur *Superficies Conicæ*, Utræque vero infernæ & supernæ conjunctim dicuntur *Superficies ad verticem oppositæ:* Punctum immobile utrique superficiei commune dicitur *Vertex:* Circulus est *Basis*, & solidum a superficie conica & circulo basi comprehensum, & in infinitum, si placet, producendum, vocatur *Conus:* cui simile etiam & æquale

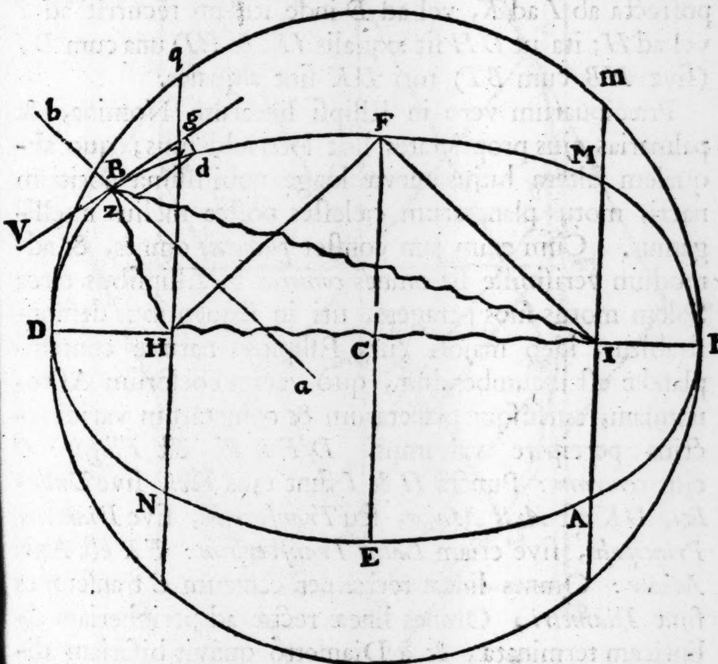
ex

ex altera parte verticis generatur. Linea recta a Coni vertice ad circuli basis centrum *Axis Coni* dicitur; qui quidem Axis, si modo sit plano circuli basis perpendicularis, Conus *Rectus* dicitur; sin minùs Conus *Obliquus*, vel *Scalenus*. Jam verò si planum utcunque positum, modo non transeat per ipsum verticem, secet superficiem conicam, vel superficies ad verticem oppositas, planum illud *Planum Secans* audit, & aliud planum per verticem transiens, & plano secanti ubique parallelum *Planum Verticale* dicitur: Curva linea quam superficies conica in plano secante describit nuncupatur *Sectio Conica*; quæ quidem Sectio diversa est pro diversa plani secantis, in quo describitur, ad Conum inclinatione. Sin Planum secans utrasque conicas superficies ad verticem oppositas simul secet, orientur in Plano Secante binæ curvæ lineæ similes & æquales, quæ *Sectiones* vel *Hyperbolæ Oppositæ* dicuntur. Si itaque Planum Secans eo modo ad superficiem Conicam inclinetur, ut planum verticale, eidem parallelum, superficiem conicam, sive potius superficies ad verticem oppositas tangat, Curva Linea in plano secante descripta dicetur *Parabola*. Si verò ea sit plani secantis ad superficiem conicam inclinatio, ut planum verticale eidem parallelum sit extra conum, ita nempe ut non tangat superficiem conicam, Planum Secans utrumque coni latus secabit, & curva linea in plano secante genita dicetur *Ellipsis*. Sin ea demum sit plani secantis ad superficiem conicam inclinatio, ut planum verticale eidem parallelum conum secet, curva illa linea in plano secante descripta dicetur *Hyperbola*. & quia fieri non possit ut planum secans unam tantum superficiem secet, quin necesse est ut superficies utrasque ad verticem oppositas simul secet, binæ illæ curvæ lineæ similes & æquales *Hyperbolæ Oppositæ*, vel *Sectiones Oppositæ*, uti jamjam notavimus, appellabuntur. Si itaque Planum secans & verticale ita simul sibi semper parallelis circumagantur,

ut Verticale nunc basin secet, nunc superficiem Coni tangat, nunc extra conum sit positum, liquet a superficie conica varias *Hyperbolarum* species, *Parabolas* varias, varias demum *Ellipsium* species in plano secante delineatum iri. Liquet insuper qualis & quam arcta sit inter omnes hasce lineas cognatio. Si enim sectio sit basi parallela, vel etiam in cono scaleno subcontrarie posita, erit *Circulus*: qui itaque inter sectiones conicas, utpote Ellipsium extrema, merito numeratur: unde mutata gradatim plani secantis inclinatione orientur infinitæ Ellipsium Species; donec tandem inclinatio evadat coni lateri parallela, ubi Ellipsium extrema evadit *Parabola*: Mutatâ verò ulterius tantillùm plani secantis inclinatione, exurget *Hyperbola*; cujus infinitæ erunt species, pro varia plani verticalis intra conum inclinatione. Ita ut Ellipsium ultimæ hinc in circulum, illinc in Parabolam; Parabola hinc in Ellipsin, illinc in Hyperbolam; & Hyperbolarum ultimæ hinc in Parabolam, illinc in lineam rectam desinant. Verumenimvero quia difficilior forsitan non paucis apparitura sit Conica hæc curvarum regularium explicatio, visum est singularum naturas ex facili quadam in plano delineatione, cum Cartesio & aliis, qua possum perspicuitate ulterius exponere.

Ut Ellipseωs ergo generationem & indolem rite capiamus, sint *H* & *I* duo puncta, vel clavi paxillive: his punctis circumponatur funiculus *BHI*: deinde immisso digito vel clavo funiculus æqualiter tensus maneat, dum circumagatur digitus vel clavus a motûs incipientis puncto *B* donec in orbem rediens ad idem punctum *B* iterum revertatur. Describetur hac puncti *B* revolutione curva linea, quam *Ellipsin* dicimus: quæ in eo tantum a circuli delineatione differt, quod Circulus circa centrum unicum, Ellipsis autem circa bina puncta tanquam centra describitur; quæ si, evanescente punctorum distantia *HI*, in unum coeant, elliptica curva hæc evadet perfecte circularis. Quo autem major est pun-

punctorum centralium distantia *HI*, manente nimirum funiculi longitudine, eo longius hæc figura a circulari recedet; & quo minor est distantia ista, ad circularem accedet magis; ita ut pro diversa distantiæ *HI*, ad funiculum *BHI*, vel ad lineam *DK* eidem funiculo æqualem, ratione diversæ ellipsium species describantur. At si funiculi longitudo eadem proportione minuatur vel augeatur quâ minuitur vel augetur punctorum centralium *H* & *I* distantia, describentur quidem Ellipses diversæ, sive diversarum magnitudinum omnes, sed quæ

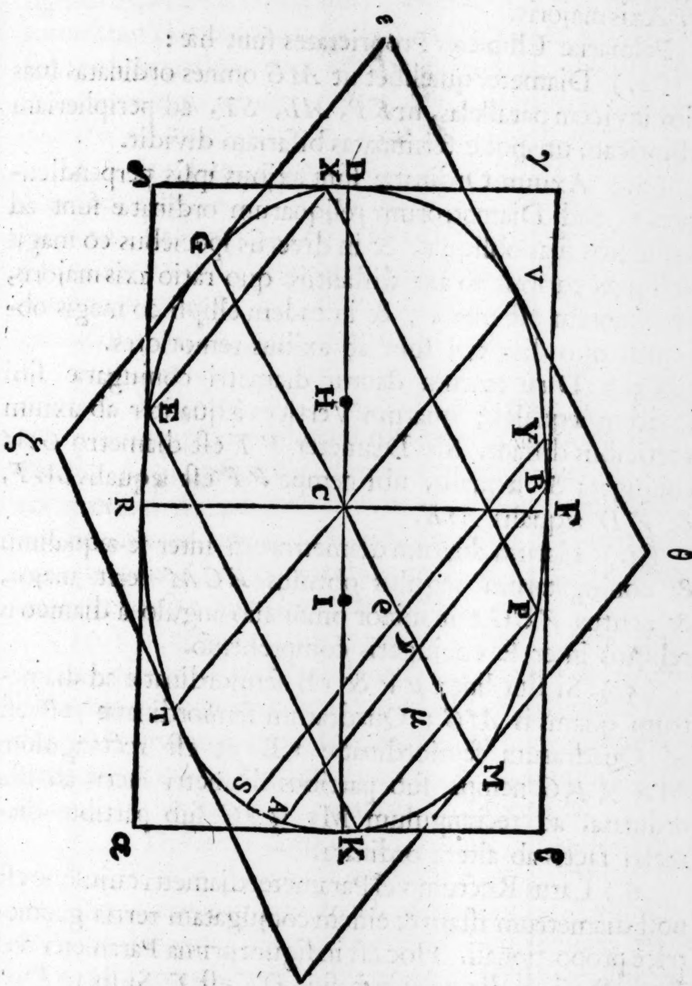


similes omnino sunt futuræ, seu ejusdem speciei. Unde perspicuum est Ellipses non magnitudine tantum, sed & specie innumeras esse, & a circulo ad lineam rectam extendi: Sicut enim coeuntibus punctis *H* & *I* Ellipsis evadit circulus, ita ad distantiam ipsius funiculi dimidiam recedentibus, Ellipsis fit linea recta, coalescente

utroque latere. Hinc etiam apparet unamquamque ellipseωn ſpeciem non minùs diſtare ab alia qualibet, quàm diſtat omnium ultima hinc a circulo, illinc a rectâ lineâ. Patet quoque ex hac delineatione quod, ſi ex aliquo puncto pro arbitrio in peripheria elliptica electo, ut *B*, duas rectas ad duo puncta centralia agamus, haſce duas lineas *B H* & *B I* ſimul ſumptas maximæ ejus diametro *D K* æquales fore, atque proinde earum ſummam ſemper dari. Quod ſane ipſa conſtructio probat: Pars enim funiculi ab *I* ad *B* extenſa, & inde ad *H* replicata eadem eſt omnino quæ porrecta ab *I* ad *K*, vel ad *D* inde itidem recurrit ad *I* vel ad *H*; ita ut *D H* ſit æqualis *IK*, & *HD* una cum *D I* (ſive *HB* cum *B I*) toti *D K* ſint æquales.

Præcipuarum vero in Ellipſi linearum Nomina, & palmarias ejus proprietates hoc loco addemus; quo aliqualem ſaltem hujus curvæ longe nobiliſſimæ notitiam nacti, motus planetarum cæleſtes poſtea melius intelligamus. Cùm enim jam conſtet *planetas* omnes, & admodum veriſimile ſit omnes *cometas* in Ellipſibus circa Solem motus ſuos peragere, uti in ſequentibus demonſtrabitur, ideo majori cura Ellipſeωs naturæ contemplandæ eſt incumbendum, quò veram coelorum Aſtronomiam, curſúſque planetarum & cometarum varios rectius percipere valeamus. *D F K R.* eſt *Ellipſis: C* ejus *centrum:* Puncta *H* & *I* ſunt ejus *Foci*, ſive *Umbilici*, *D K* eſt *Axis Major*, ſeu *Tranſverſus*, ſive *Diameter Principalis*, ſive etiam *Latus Tranſverſum: F R* eſt Axis *Minor:* Omnes lineæ rectæ per centrum *C* tranſeuntes ſunt *Diametri:* Omnes lineæ rectæ ad peripheriam ellipticam terminatæ, & â Diametro quâvis bifariam diviſæ dicuntur *Ordinatæ*, vel *Ordinatim applicatæ* ad iſtam diametrum. Sic *M G* per centrum tranſiens eſt *Diameter*, & *P K* ab eadem bifariam diviſa ejuſdem *Ordinata* vel *Ordinatim applicata*. Pars Diametri cujuſque inter ejus verticem & ordinatam intercepta ut Mμ dicitur ejus *Abſciſſa:* Linea a Diametri vertice ipſius ordina-

dinatis parallelωs ducta, ut $\eta\theta$ est Ellipseωs in isto vertice *Tangens*: Diameter alterius Diametri ordinatis parallela ejusdem dicitur *Diameter Conjugata*, & ordinatas



suas priori diametro parallelas habet. Sic diametri *GM* & *VT* sunt sibi invicem Conjugatæ, & ordinata *PK*

dia-

diametro *VT*, & ordinata *KE* diametro *GM* eſt parallela. Ordinata per focorum utrumvis ad axem majorem *MA* in figura prima dicitur *Latus Rectum* Principale, vel *Parameter* Axis majoris.

Palmariæ Ellipſeωs Proprietates ſunt hæ:

(1.) Diameter quælibet ut *MG* omnes ordinatas ſuas ſibi invicem parallelas, ut *KP*, *AB*, *SY*, ad peripheriam ellipticam utrinque terminatas bifariam dividit.

(2.) Axium Ordinatæ ſunt axibus ipſis perpendiculares: Sed Diametrorum reliquarum ordinatæ ſunt ad diametros ſuas obliquæ, & in diverſis ſpeciebus eo magis obliquæ, paribus ab axe diſtantiis, quo ratio axis majoris, ad minorem eſt major; & in eadem ellipſi eo magis obliquæ, quo diametri ſunt ab axibus remotiores.

(3.) Duæ tantum dantur diametri conjugatæ ſibi invicem æquales; quarum Vertices æqualiter ab axium verticibus diſtant. Sic Diameter *VT* eſt diametro *GM* conjugata & æqualis, ubi nempe *VF* eſt æqualis *MF*, & *VD* æqualis *MK*.

(4.) Harum duarum diametrorum inter ſe æqualium & conjugatarum angulus obtuſus *VCM* erit major, & acutus *VCG* erit minor omni alio angulo a diametris reliquis inter ſe conjugatis comprehenſo.

(5.) Si ſint lineæ μP & νB ſemiordinatæ ad diametrum quamvis *MG*; Quadratum ſemiordinatæ μP eſt ad Quadratum ſemiordinatæ νB ut eſt rectangulum $M\mu \times \mu G$ nempe ſub partibus diametri factis ab iſta ordinata, ad rectangulum $M\nu \times \nu G$ ſub partibus diametri factis ab altera ordinata.

(6.) Latus Rectum vel Parameter diametri cujuſque eſt poſt diametrum iſtam & eidem conjugatam tertia geometrice proportionali. Hoc eſt in figura prima Parameter vel Latus Rectum diametri cujuſvis *DK* eſt *Y*. Si ſit ut Diameter *DK* ad conjugatam diametrum *EF* ita *EF* ad *Y*. Unde *AM* Ordinata per focum, lateri recto principali, ut prius, æqualis, eſt poſt Axem majorem & minorem

tertia

tertia proportionalis. Axes enim ſunt diametrorum inter ſe conjugatarum primariæ.

(7.) Quadratum ſemiordinatæ cujuſvis ut *MI* in prima figura minus eſt Rectangulo ex abſciſſa quavis ut *IK* in Latus rectum Diametri ſuæ, ſive quam *IK* × *Y*. Et quadratum ſemiordinatæ P*μ* minus eſt Rectangulo ex abſciſſa M*μ* in latus rectum ad diametrum *MG*, pertinens. A quo defectu vel ἔλλειψις Oritur hujus ſectionis nomen.

(8.) Si a puncto quovis *B* in figura prima ducantur ad focos lineæ rectæ *BH* & *BI* iſtarum ſumma axi majori æquabitur. Et ſi angulus *IBH* ab iis lineis comprehenſus a linea recta *ba* dividatur biſariam, Linea recta *ba* eſt tangenti in puncto *B*, ſive lineæ *VB*, hoc eſt, curvæ in ipſo contactûs puncto perpendicularis.

(9.) Curvatura arcuum ſimilium Ellipticorum quoad centrum Ellipſeωs eſt in diverſis a centro illo diſtantiis in quadruplicata iſtarum diſtantiarum ratione directe. Sic ſi *CK* ſit ipſius *CF* dupla, erit curvatura in diſtantiâ maximâ *K*, ad curvaturam in diſtantia minima *F*, ut ſedecim ad unum. Si *CK* ſit ipſius *CF* tripla erit curvatura in *K* ad curvaturam in *F* ut 81 ad 1: Atque ita in reliquis; uti olim oſtendetur.

(10.) Curvatura autem arcuum ellipticorum quoad focum eſt in diverſis diſtantiis a foco iſto in ſimplici diſtantiæ ratione directe; Sic ſi *HD* ſit dimidia ipſius *HK* erit curvatura quoad focum *H* ad *D*, curvaturæ quoad eundem focum ad *K* etiam dimidia; & ſic ubique. Et ita quoque res ſe habet in parabola & hyperbola.

(11.) Diſtantia corporis in Ellipſi circa focum *H* revolventis ab iſto foco eſt omnium maxima in puncto *K*, omnium minima in puncto *D*, & mediocris in punctis *E* & *F*; & diſtantia iſta mediocris *HF* eſt ſemiaxi majori *DC* vel *CK* æqualis: ut ex ellipſeωs geneſi eſt apertiſſimum.

(12.) Subtenſa evaneſcens anguli contactus, diſtantiæ a foco parallela, ad æquale a diſtantia iſta intervallum perpendiculare, in eadem Ellipſi, quin & Parabola & Hy-

Hyperbola ſemper manet data ſive invariata. Sic ſi dZ ſemper detur, erit & gd in diſtantia infinite parva ſemper data.

(13.) Area Ellipſeωs eſt ad aream circuli circumſcripti ut axis minor ad majorem; & ita ſunt inter ſe partes correſpondentes quælibet ut: MIK, mIK; & Ordinatæ ad axem majorem ut MI dividuntura peripheria elliptica ut M in eadem ſemper ratione; ita ut MI ſit ad mI in eadem ratione data, nempe, in ratione axis minoris ad majorem. Neque aliter de circulo Ellipſi inſcripto eſt ratiocinandum.

(14) Parallelogramma omnia circa diametros Ellipſeωs conjugatas deſcripta, & Ellipſin comprehendentia ſunt ubique æqualia. Sic Parallelogrammum $\alpha\beta\gamma\delta$ eſt æquale Parallelogrammo $\epsilon\zeta\eta\theta$: & ſic ubique.

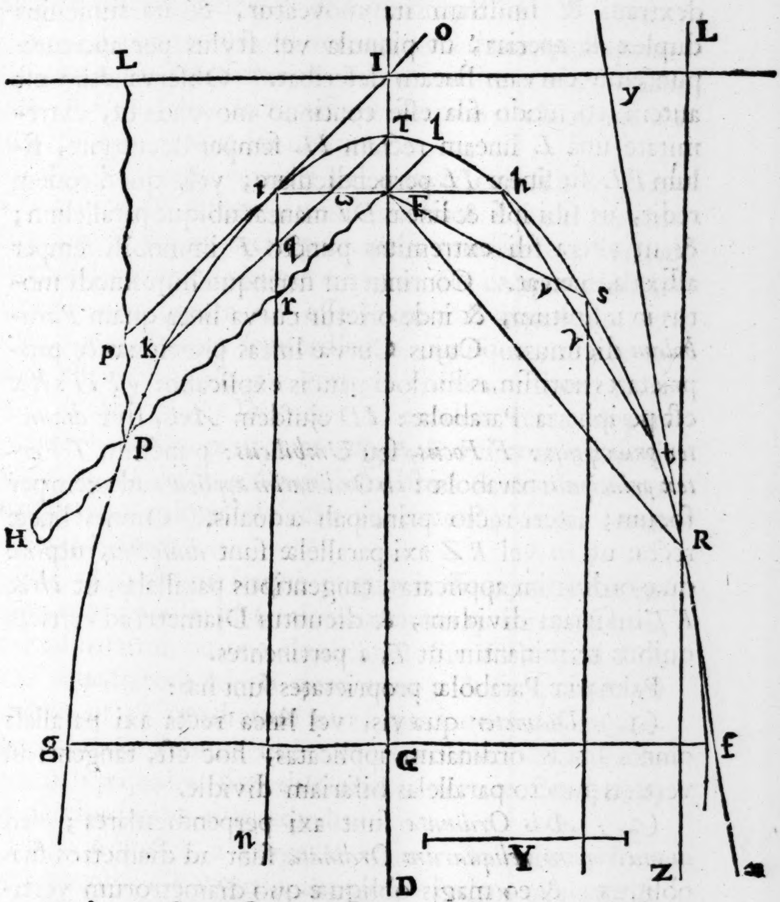
(15.) Si linea recta per focorum alterum ſemper tranſiens ita moveatur ut area elliptica ab eadem deſcripta ſit tempori proportionalis, motus angularis lineæ rectæ ab altero foco ad priorem in curva ducta erit fere æquabilis. Sic ſane in delineatione Ellipſeωs ſuperius allata, ſi ita lineæ HB motus angularis eſſet temperatus, ut pro reciprocâ diſtantiæ ratione acceleratus vel retardatus aream DHB tempori proportionalem deſcripſiſſet, Motus angularis KIB circa focum alterum I eſſet fere tempori proportionalis, & proinde ſine notabili acceleratione vel retardatione tantum non æquabilis; hoc eſt ubi Ellipſis a Circulo non admodum recedit.

Feb. 7. 170$\frac{3}{4}$.

II.

UT jam ab Ellipſi ad Parabolam tranſeamus, Sit DI linea recta infinita; eique ſit etiam linea recta infinita IL perpendicularis. Accepto jam in linea DI puncto quovis ut F, diviſáque bifariam linea FI in puncto T, Punctum illud T erit *Vertex principalis* figuræ

guræ, & descriptionis initium. Capiatur filum duplex *PH*, hoc est, filum vel funis ex filis vel funiculis binis,



æquali juxta se tensione positis, conflatus: utriusque funiculi extremitas punctis *F* & *I* affigatur eâ lege, ut funiculus uterque, ex quibus funis integer componitur, in partes duas distinctus, & hac illac æqualiter extensus, lineam *FI* exacte adæquent; ita ut filorum partitio vel vertex ipsi puncto medio *T* directe superemineat, punctumque *T* proinde ipsi filorum partitioni vel aper-

turæ

turæ subsit. His ita præparatis, Descriptoris manus, quæ fili partem integram tenet, hac illac versus partes dextram & sinistram ita moveatur, & ita funiculus duplex se aperiat, ut pinnula vel stylus per aperturæ punctum curvam lineam describat. Observandum est autem eo modo fila esse continuo movenda ut, extremitate unâ *L* lineam rectam *IL* semper occupante, filum *PL* sit lineæ *IL* perpendiculare; vel, quod eodem redit, ut sibi ipsi & lineæ *DI* maneat ubique parallelum; & ut altera fili extremitas puncto *F* immobili semper affixa adhæreat. Continuetur utrinque hujusmodi motus in infinitum, & inde orietur curva linea quam *Parabolam* dicimus. Cujus Curvæ lineas præcipuas & proprietates notissimas hic loci paucis explicabo. *gPiTsRx* est peripheria Parabolæ: *ID* ejusdem *Axis*, sive *diameter principalis*: *F Focus*, seu *Umbilicus*: punctum *T Vertex principalis* parabolæ: *ih Ordinatim applicata* ad axem per focum; lateri recto principali æqualis. Omnes lineæ rectæ ut *in* vel *RZ* axi parallelæ sunt *diametri*, utpote quæ ordinatim applicatas, tangentibus parallelas, ut *ih* & *KT* bifariam dividunt, & dicuntur Diametri ad vertices quibus terminantur ut *T*, *i* pertinentes.

Palmariæ Parabolæ proprietates sunt hæ:

(1.) *Diameter* quævis, vel linea recta axi parallela omnes lineas ordinatim applicatas, hoc est, tangenti in verticis puncto parallelas bifariam dividit.

(2.) *Axis Ordinatæ* sunt axi perpendiculares; sed *diametrorum reliquarum Ordinatæ* sunt ad diametros suas obliquæ; & eo magis obliquæ quo diametrorum vertices a vertice Parabolæ primario magis distant.

(3.) *Latus Rectum* vel *Parameter* ad diametrum quamvis pertinens, est post abscissam quamvis & semiordinatam suam tertia geometrice proportionalis: Hoc est, Latus rectum diametri *in* vel verticis *i* est *Y* si sit ut abscissa *iq*, ad semiordinatam *qk*, ita semiordinata illa *qk*, ad *Y*.

(4.) La-

(4.) *Latus rectum principale*, ſive ad axem pertinens eſt Ordinatæ per focum *ih* æqualis; & eſt diſtantiæ minimæ a vertice principali *FT* quadrupla.

(5.) Latus rectum ad verticem vel diametrum quamvis pertinens eſt diſtantiæ verticis iſtius a foco etiam quadruplum: ſic latus rectum verticis *s* eſt ipſius *Fs* quadruplum, atque ita ubique.

(6.) Diſtantia verticis vel puncti cujuſvis in parabola a foco eſt diſtantiæ minimæ a linea *LL* axi perpendiculari, & lateris recti principalis quadrante a vertice Parabolæ diſtante, ubique æqualis. Sic ex ipſa conſtructione liquet lineam *FP* eſſe lineæ *PL* æqualem.

(7.) Quadratum ſemiordinatæ cujuſque ut *qk*, æquale eſt rectangulo ex verticis ejuſdem Latere recto ut *Y*, & abſciſſa *iq* Diametri ad eundem verticem pertinentis. Et ex æqualitate παραβολῆς vel comparationis in hac figurâ inter rectangulum iſtud & ſemiordinatæ quadratum, abſque defectu vel exceſſu, oritur hujus ſectionis Nomen.

(8.) Ob datum itaque in quavis diametro latus rectum, ſunt abſciſſæ ut ſemiordinatarum quadrata, ſive in ſemiordinatarum ratione duplicata: Sic *TF*, eſt ad *TG*, ut *iF* quadratum ad *gG* quadratum; & ſic quoque eſt *iq* ad *ir* ut *qT* quadratum ad *rl* quadratum; & ita ubique. Unde quoque ubi axis abſciſſa eſt lateri recto principali æqualis, ſive diſtantiæ a vertice quadrupla, erit ſemiordinatæ ſuæ æqualis.

(9.) Angulus a tangente quavis & linea a foco comprehenſus eſt æqualis angulo ab eadem tangente & diametro quavis, vel etiam axe comprehenſo. Sic anguli *IiF* & *pin* ſunt æquales. Unde ſane, quod obiter eſt notandum, Omnes lucis radii in partem ſuperficiei a convolutione parabolæ circa axem genitæ concavam axi parallelos incidentes a ſuperficie iſta paraboloide in focum *F* reflectentur, & ardorem vehementiſſimum generabunt: a quâ quidem proprietate *foci* nomen figuræ hu-

hujus umbilicus meruit: & idem nomen ſimilibus punctis in Hyperbola & ellipſi communicavit.

(10.) Parabola, ſicut & Hyperbola, ſpatium non claudit, ſed in infinitum protenditur.

(11.) Curva Parabolica ad parallelismum cum diametris ſuis ſemper magis & magis in infinitum tendit; ſed ad eundem pertingere nunquam poteſt.

(12.) Si duæ parabolæ eodem axe & vertice principali deſcribantur, erunt axi communi ordinatæ in data ratione a parabolis reſectæ; & areæ ab iiſdem axe, ordinata, & curvis comprehenſa erunt in eadem data ratione ad invicem.

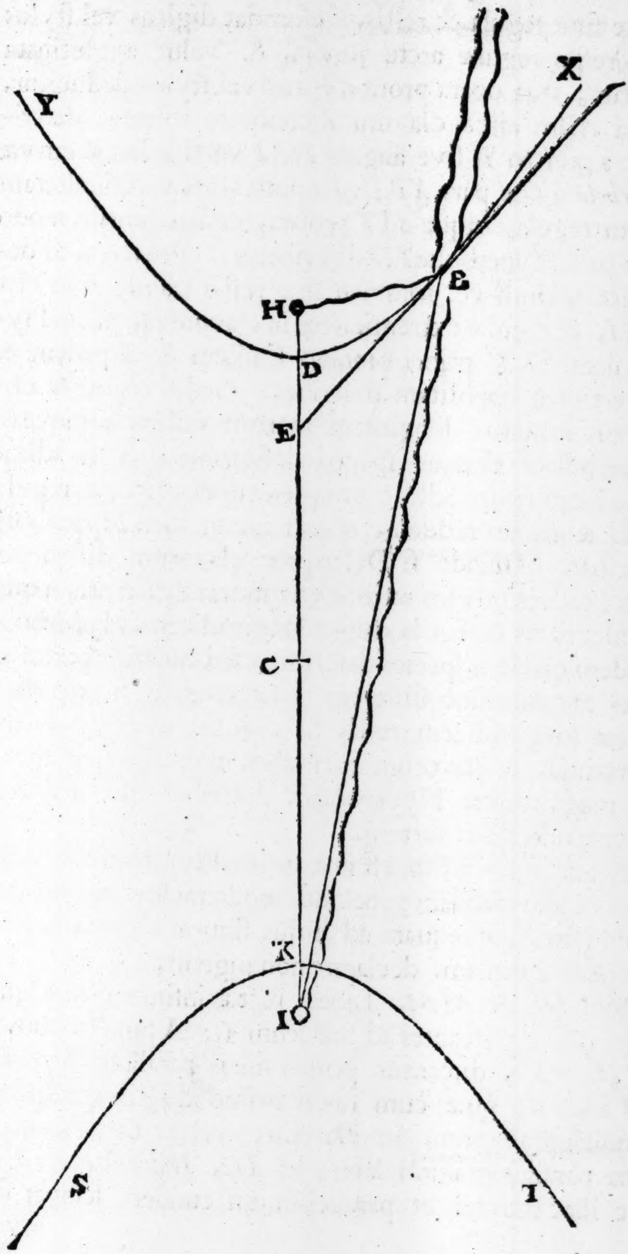
(13.) Spatium quodvis Parabolicum intra curvam & ordinatam comprehenſum eſt ad parallelogrammum ex eadem baſi & altitudine in ratione ſubſeſquialtera ſive ut 2 ad 3. & ad ſpatium externum in ratione dupla ſive ut 2 ad 1. Sic *qiT* eſt ad *qiI* ut 2 ad 3. & ad *iIT* ut 2 ad 1. Unde Parabolæ Quadratura facillima oritur.

(14.) Diſtantia inter axis verticem & tangentis cujuſvis interſectionem eſt æqualis axis abſciſſæ ad ejuſdem ordinatam ex puncto contactûs applicatam. Sic *TI* eſt æqualis *TF*; & ita ubique.

(15.) Omnes Parabolæ ſunt ſimiles vel ejuſdem ſpeciei; quemadmodum omnes circuli.

(16.) Si per occurſum duarum contingentium agatur diameter. Hæc diameter bifariam dividet conjungentem tactus. Quæ Parabolæ proprietas etiam Ellipſi & Hyperbolæ eſt applicanda.

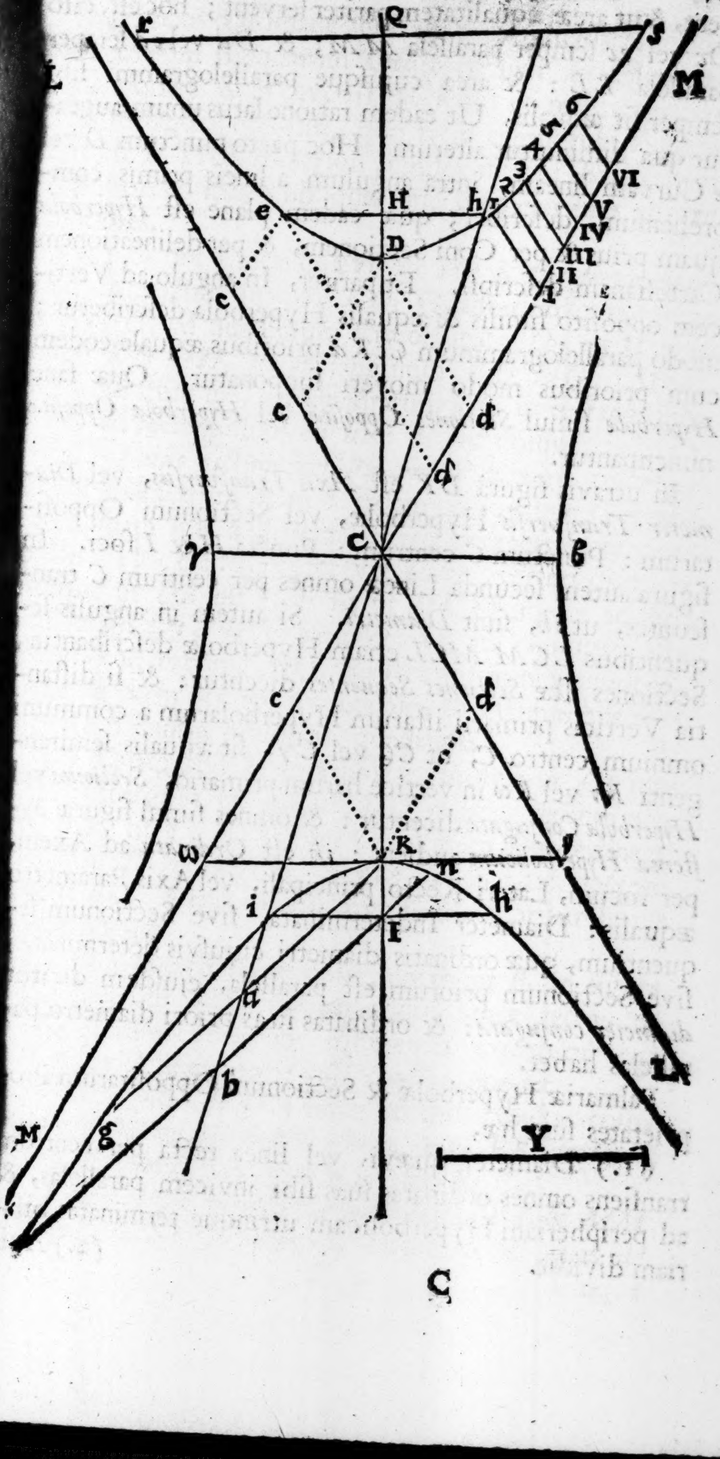
Ut jam a Parabola ad Hyperbolam tranſeamus: Sit Regula vel baculus *IB* ſatis longus, ſint *I* & *H* puncta centralia, focis Ellipſeωs correſpondentia, quibus clavi inſigantur: Annexâ jam extremitati longi baculi vel regulæ reſti baculo duplo breviori, altera ejus extremitas perforetur, & ita clavo *I* immittatur; nodus autem vel foramen in altera reſtis extremitate clavo alteri immittatur: Poſito jam digito aut ſtylo in puncto *B*, ubi mutuo junctæ


Y
X
B
H
D
E
C
K
I
S
T

junctæ ſunt regula & reſtis, deſcendat digitus vel ſtylus dum reſtis regulæ arcte juncta, & velut agglutinata teneatur; qua opera prout digitus vel ſtylus deducitur, regula etiam circa clavum *I* continuo rotante, deſcribetur a puncto *B* ſive anguli *HBI* vertice lineæ curvæ *Hyperbolæ* dictæ pars *XB D*. Et poſtea, converſa in alteram partem regula, eaque ad *Y* prolata, eodem prorſus modo altera pars Hyperbolæ *YD* deſcribetur. Præterea, Si deſcriptor nodum vel foramen ſuæ reſtis transferat in clavum *I*, & regulæ extremitatem in clavum *H*, aliam Hyperbolam *SKT* priori omnino ſimilem & æqualem & ad verticem oppoſitam deſcribet. Sed ſi regula & clavis non mutatis, longiorem tantum reſtim admoveat, Hyperbolam alterius ſpeciei deſignabit: & ſi adhuc paulo longiorem, adhuc alterius, donec ipſam regulæ duplæ æqualem reddens, rectam lineam loco Hyperbolæ deſcribat. Deinde ſi Deſcriptor clavorum diſtantiam mutet eadem prorſus ratione qua mutat differentiam quæ eſt inter funis & regulæ duplæ longitudinem, Hyperbolas ejuſdem quidem ſpeciei deſcribet, ſed quarum partes ſimiles magnitudine different: Et tandem ſi æqualiter augeat longitudinem reſtis & regulæ, manente earum differentiâ, & clavorum intervallo, non aliam aut ſpecie aut magnitudine Hyperbolam deſcribet, ſed majorem ſolummodo illius partem.

Attamen fatendum eſt non paucas Hyperbolæ proprietates ex alio quodam generandi modo melius innoteſcere: Eum itaque, antequam ad hujus figuræ nomina & proprietates deveniam, declarare non pigebit.

Sint *LL* & *MM*. Lineæ rectæ infinitæ, in angulo quovis ſe interſcantes ad punctum *C*: A puncto quovis, ut *D*, vel *e*, ducantur primis lineis parallelæ *Dc*, *Dd* vel *ec*, *ed*; quæ cum lineis primo ductis conſtituant parallelogrammum, ut *Dc Cd*; vel *ec Cd*: Concipe bina parallelogrammi latera ut *Dc*, *Dd* vel *ec*, *ed* ita hac illac moveri ut parallelіſmum eundem ſemper ſervent



C

vent, &ut areæ æqualitatem pariter ſervent; hoc eſt, eſto *Dc* vel *ec* ſemper parallela *MM*; & *Dd* vel *ed* ſemper parallela *LL*: & area cujuſque parallelogrammi ſibi ſemper ſit æqualis, Ut eadem ratione latus unum augeatur qua diminuitur alterum: Hoc pacto punctum *D* vel *e* Curvam lineam, intra angulum a lineis primis comprehenſum, deſcribet; quæ eadem plane eſt *Hyperbola* quam prius & per Coni Sectionem, & per delineationem Carteſianam deſcripſi. Et pariter, In angulo ad Verticem oppoſito ſimilis & æqualis Hyperbola deſcribetur; modo parallelogrammum *CcKd* prioribus æquale eodem cum prioribus modo moveri ſupponatur. Quæ ſane *Hyperbolæ* ſimul *Sectiones Oppoſitæ* vel *Hyperbolæ Oppoſitæ* nuncupantur.

In utravis figurâ *DK* eſt *Axis Tranſverſus*, vel *Diameter Tranſverſa* Hyperbolæ, vel Sectionum Oppoſitarum: Punctum *C* centrum: Puncta *H* & *I* foci. In figura autem ſecunda Lineæ omnes per centrum *C* tranſeuntes, ut *ih*, ſunt *Diametri*. Si autem in angulis ſequentibus *LCM MCL* etiam Hyperbolæ deſcribantur, Sectiones iſtæ *Sectiones Sequentes* dicentur: & ſi diſtantia Verticis primarii iſtarum Hyperbolarum a communi omnium centro *C*, ut *C*ϐ vel *C*γ, ſit æqualis ſemitangenti *Kv* vel *K*ω in vertice harum primario, *Sectiones* vel *Hyperbolæ Conjugatæ* dicentur: & omnes ſimul figuræ *Syſtema Hyperbolicum* audient: *ih* eſt *Ordinata* ad Axem, per focum, Lateri Recto principali, vel Axis Parametro æqualis: Diameter Indeterminata, ſive Sectionum ſequentium, quæ ordinatis diametri cujuſvis determinatæ, ſive Sectionum priorum eſt parallela, ejuſdem dicitur *diameter conjugata*: & ordinatas ſuas priori diametro parallelas habet.

Palmariæ Hyperbolæ & Sectionum Oppoſitarum Proprietates ſunt hæ,

(1.) Diameter quævis vel linea recta per centrum tranſiens omnes ordinatas ſuas ſibi invicem parallelas, & ad peripheriam Hyperbolicam utrinque terminatas bifariam dividit.

(2.) Axis

(2.) Axis Ordinatæ sunt axi perpendiculares; Sed Diametrorum reliquarum Ordinatæ sunt ad diametros suas obliquæ; & in diversis speciebus eo magis, paribus ab axe distantiis, obliquæ, quo ratio angulorum sequentium est ad Hyperbolarum angulos major; & in eadem Hyperbola eo magis obliquæ quo diametri sunt ab axe remotiores.

(3.) Si sint Lineæ quævis ut *Hh* & *Qs semiordinatæ* ad diametrum quamvis *KD*, Quadratum semiordinatæ *Hh*, est ad quadratum semiordinatæ *Qs* ut rectangulum *KH DH*, ad rectangulum *KQ DQ*: Atque ita Quadratum *bn*, ad Quadratum *aK*, ut rectangulum *b hb*, ad rectangulum *ia ha*: & sic ubique.

(4.) *Latus rectum* vel *Parameter diametri* cujusque est post diametrum istam & eidem conjugatam (vel tangentem suam ipsi æqualem) Tertia geometrice proportionalis: Hoc est Parameter vel Latus rectum diametri cujusque ut *DK* est *Υ*, si sit ut *DK* Diameter ad sibi conjugatam *Ϛγ*, vel ei æqualem *ων*, ita conjugata ista *γ* vel *ων* ad tertiam *Υ*. Et Latus Rectum principale est ordinatæ ad axem per focum æquale, & est minimæ foci vertice distantiæ plusquam quadrupla.

(5.) Quadratum Semiordinatæ cujusvis ut *Qr* majus est rectangulo ex abscissa *DQ* in latus rectum diametri suæ, ut Y: Et pariter Quadratum semiordinatæ majus est rectangulo abscissæ *ib* in latus rectum diametri *hi*. A quo excessu sive ὑπερβολῆς oritur hujus ctionis nomen.

(6.) Si a quovis hyperbolæ puncto ut *B*, in figura ori, ducantur ad focum utrumque lineæ rectæ, ut *H BI*, harum rectarum differentia æquabitur axi *K*; uti ex delineatione facile constare poterit.

(7.) Si angulus *HBI* a lineis ad focos ductus comhensus bifariam dividatur a linea recta *EB* ista linea ta erit Hyperbolæ tangens in puncto *B*.

(8.) Lineæ rectæ hyperbolas includentes *LL* & *MM* t hyperbolarum Asymptoti, sive tales ad quas utrinque

trinque magis magiſque accedit Curva, ſed eas nunquam poſſit attingere, vel nunquam cum iiſdem coincidere.

(9) Variæ ſunt Hyperbolarum ſpecies pro varia anguli aſymptotis comprehenſi *LCM* magnitudine: Manente vero iſto angulo ſpecies hyperbolarum manebit, ſed pro magnitudine parallelogrammi deſcribentis variæ hyperbolæ magnitudine diverſæ orientur: Si vero angulus ab aſymptotis comprehenſus ſit rectus, Hyperbola dicetur æquilatera, vel rectangula, & Latera recta omnium diametrorum erunt diametris ſuis (ut fit in circulo) ubique æqualia: & hyperbolarum eodem axe deſcriptarum, in variis aſymptotorum angulis, lineæ rectæ axi perpendiculares erunt in proportione data ab omnibus reſectæ, & ſpatia pariter a rectis ſeu ordinatis, axe producto, & curvis incluſa in eadem ratione data.

(10.) Si diſtantiæ ab hyperbolæ centro in aſymptoto accipiantur in ratione geometrica; ita ut CI CII CIII CIV CV CVI ſint continue proportionales geometrice; & ab iſtis punctis ducantur alteri aſymptoto parallelæ lineæ I 1 II 2 III 3 IV 4 V 5 VI 6: erunt ſpatia I 2 II 3 III 4 IV 5 V 6 inter ſe æqualia. Atque adeo ſi Aſymptotos iſta *CM* ſecundum rationem numerorum omnium, naturali ſerie ſe invicem ſuperantium diviſa ſupponatur, erunt ſpatia iſta numerorum omnium Logarithmis proportionalia.

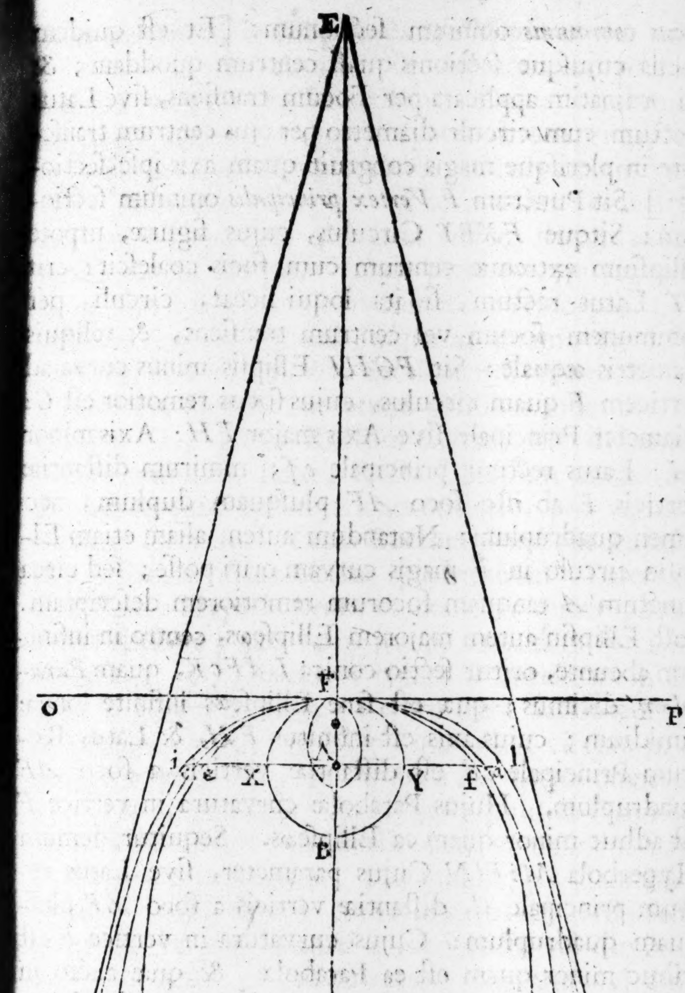
Feb. 14. 170$\frac{1}{4}$.

III.

EXpoſitis jam ſigillatim lineis curvis quas Sectiones Conicas vocamus, Videamus paulo quid ex mutuâ omnium comparatione elucebit, & quænam ſit inter ſingulas cognatio, qualis differentia & habitudo mutua, paucis conſideremus.

Sit ergo *A* punctum, circuli *FXBY centrum*, &

Foc


E
F
O
P
i
e
X
Y
f
l
B
G
I
T
M
N
C
K
H
I

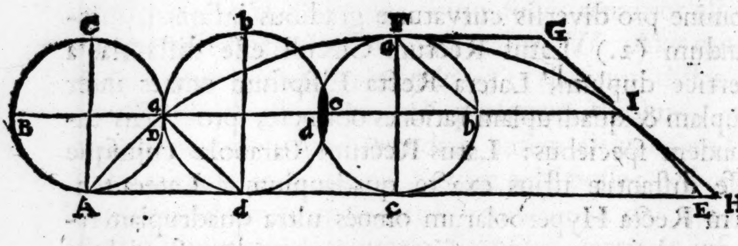
Focus communis omnium sectionum: [Et est quidem Focus cujusque sectionis quasi centrum quoddam; & axi ordinatim applicata per Focum transiens, sive Latus Rectum cum circuli diametro per ejus centrum transeunte in plerisque magis congruit quam axis ipse sectionis:] Sit Punctum *F Vertex principalis* omnium sectionum: Sitque *FXBY* Circulus, cujus figuræ, utpote Ellipsium extremæ centrum cum focis coalescit: erit *XY* Latus rectum, si ita loqui liceat, circuli, per communem focum vel centrum transiens, & reliquis diametris æquale: Sit *FGHI* Ellipsis minus curva ad verticem *F* quam circulus, cujus focus remotior est *C*: Diameter Principalis sive Axis major *FH:* Axis minor *GI:* Latus rectum principale *ef*; nimirum distantiæ verticis *F* ab isto foco *AF* plusquam duplum, nec tamen quadruplum: Notandum autem aliam etiam Ellipsin circulo in *F* magis curvam oriri posse; sed circa punctum *A* tanquam focorum remotiorem descriptam. Post Ellipsin autem majorem Ellipseωs, centro in infinitum abeunte, oritur sectio conica *LdFcK*, quam *Parabolam* dicimus; quæ est sane Ellipseωs infinite longæ dimidium; cujus axis est infinitus *FH*, & Latus Rectum Principale *cd* est distantiæ verticis a foco *AF* quadruplum. Hujus Parabolæ curvatura in vertice *F* est adhuc minor quam ea Ellipseωs. Sequitur demum Hyperbola *MiFlN* Cujus parameter, sive Latus rectum principale *il*, distantiæ verticis a foco *AF* plusquam quadruplum: Cujus curvatura in vertice *F* est adhuc minor quam est ea Parabolæ: & quæ aucto in infinitum angulo *TEV* ab asymptotis comprehenso, & asymptotis in unam rectam *OP* desinentibus, in infinitum minuetur, donec ipsa hyperbola cum asymptotis suis in lineam Rectam axi perpendicularem tandem abeat. Unde notandum (1) Sectiones Conicas esse per se curvarum linearum regularium & congenerum systema, & Unam in alteram, ubi in infinitum augetur vel minuitur, perpetuo mutari. Ita circulus diminuta vel aucta tantillum

lum curvatura, in Ellipsin abit; Ellipsis autem centro ejus in infinitum abeunte, & curvatura eo pacto diminuta vertitur in Parabolam: Cujus curvatura si tantillum mutetur, exurget Hyperbolarum prima, quarum species cum sint innumeræ per curvaturam gradatim diminutam emergent omnes, donec evanescente curvatura hyperbola ultima in rectam lineam axi perpendicularem desinat. Unde patet omnem regularem & circulo congenerem curvaturam a circulo ipso, figurâ omnium maxime æquabili, usque ad lineam rectam, esse curvaturam conicam, sive Sectionem Conicam, & vario nomine pro diversis curvaturæ gradibus insigniri. Notandum (2.) Latus Rectum Circuli esse distantiæ a vertice duplum, Latera Recta Ellipsium omnes inter duplam & quadruplam rationes obtinere, pro variis earundem speciebus: Latus Rectum Parabolæ cujusque esse distantiæ istius exacte quadruplum. Latera tandem Recta Hyperbolarum omnes ultra quadruplam rationes obtinere; pro variis nempe earundem speciebus. Notandum (3.) Diametros omnes se intersecare in Circulò & Ellipsi in figuræ Centro intra Sectionem; at eo longius a vertice in Ellipsi quo illa a circulo in diversum longius abit: In Parabola Diametros omnes esse inter se & axi parallelas: In Hyperbola autem Diametros omnes se intersecare extra Sectionem, in communi centro Sectionum oppositarum. Notandum (4.) Eam esse in omnibus hisce figuris curvaturæ focum respicientis rationem, ut pro distantiâ a foco aucta vel diminuta, curvatura etiam in eadem ratione augeatur vel diminuatur. Quanquam enim propter obliquitatem tangentium curvatura plerumque in minori a foco distantia videatur major, & in majore minor, tamen Curvatura vera per subtensæ anguli contactus a distantiæ ratione differentiam definienda, est e contra in majori distantia major, & in minore minor, & in ipsa distantiæ auctæ vel diminutæ ratione major minorve; uti priùs

annotavimus, & ut in ſequentibus plenius patebit. Atque hæc de Sectionibus Conicis.

Cum autem & lineæ Cycloidis dictæ uſus aliqualis futurus ſit, ejus deſcriptionem paucis etiam dabimus.

Si ſuper recta linea *AE* provolvi concipiatur Rota ſive circulus *ABCD*. donec punctum ejus *A*, in quo dictam lineam tangit, eidem rurſus poſt revolutionem integram occurrat in *E*, Emetietur Circulus Genitor *ABCD* lineam *AE* peripheriæ ſuæ æqualem, punctum *A* vero motu ſuo compoſito deſcribet lineam Curvam *AFE*, quæ Trochoïdes ſive Cycloïs appellatur: Cu-



jus lineæ longitudo eſt diametri circuli genitoris quadrupla, & ſpatium Cycloidale, quod curva hæc & recta ſubtenſa *AE* comprehendunt, eſt areæ circuli genitoris triplum. Cujus pars quævis a vertice æſtimata, ut *FI*, eſt chordæ circuli *Fb* ubique dupla, cujus quoque tangens quævis ut *GIH* eſt eidem chordæ *Fb* ubique parallela,

Expoſitis jam Sectionum Conicarum, quin & Cycloidis natura, Generatione, & primariis affectionibus; Motuum Leges veras, tum vulgo notas, tum a Cl. Newtono primitus repertas trademus. Et in inventis Newtonianis ſive hic loci ſive deinceps proponendis, ipſiſſima viri maximi verba, ubi viſa ſunt per ſe clara ſatis & perſpicua, uſurpabimus; ita tamen ubique ut quæ obſcuriora videntur & difficiliora facilius explicare & demonſtrare, atque omnibus palam facile conemur.

DEFI-

DEFINITIONES.

(1.) CORPUS ſive Materia eſt ſubſtantia extenſa, ſolida, vel impenetrabilis, per ſe quidem ad motum vel quietem indifferens, iners, & paſſiva; Motus verò qualiſcunque, & figurarum formarumque omnium capax. Materiam ſubſtantiam *extenſam* dico, quod partem aliqualem ſpatii extenſi occupat: *ſolidam* vel *impenetrabilem* dico, non quod a ſpatio, vel forte a ſubſtantiis aliis incorporeis penetrari nequeat; ſed quod omni alii materiæ ſit impenetrabilis; & ideo rei *ſolidæ* nomen vel maxime mereatur: Materiam *ad motum vel quietem per ſe indifferentem* dico; non quod motum æque ac quietem rem plane negativam vel privativam exiſtimem, ſed quod corporis moti æque ac quieſcentis notio ſit pariter facilis atque familiaris: Materiam *per ſe inertem* dico atque *paſſivam*, quod nihil actionis vel ἐνεργείας vel αὐτοκινήσεως, aut in ejus natura aut affectibus unquam percipimus; quin e contra ex omnibus motuum phænomenis meram ejus inertiam ubique colligimus: *Motus vero qualiſcunque & figurarum formarumque omnium capacem* dico, quod quotidiana mundi phænomena, & experimenta infinita talem ejus indolem & naturam demonſtrant. Tempus, Spatium, Locum, & Motum, tanquam res omnibus notiſſimas vix opus eſt ut *definiamus:* Ad tollenda tamen præjudicia quædam, convenit cum Cl. Newtono quantitates haſce in *Abſolutas* & *Relativas*, *Veras* & *Apparentes*, *Mathematicas* & *Vulgares* diſtinguere, & ita quodammodo *deſcribere*; quod ordinis & methodi gratiâ ſequentibus definitionibus fiet.

(2.) Tempus Abſolutum, Verum, & Mathematicum eſt *Æterna & Æquabilis Duratio,* ex partibus ordine immutabili ſibi ſuccedentibus compoſita.

In ſe enim, & natura ſua æquabiliter fluit, abſque relatione ad externum quodvis. Nec enim pendet tem-

pus

pus absolutum a motu rerum, nedum a quiete; nec quidem ab earum existentia: Sive enim res quævis existat, sive non existat; sive res existens moveatur sive non moveatur, perinde est in hoc casu. Fluit Tempus æquabiliter, utcunque res quævis aliæ se habent.

(3.) Tempus Relativum, Apparens, & Vulgare est *Sensibilis* & externa quævis Durationis, sive per motum sive per methodos alias *Mensura*; sive accurata sit illa mensura, sive inæquabilis; quâ vulgus vice veri Temporis utitur; Ut Hora, Dies, Mensis, Annus. Mundi vel Systematis cujusvis a principio ad finem perseverantia, &c.

Tempus Absolutum a Relativo distinguitur in Astronomiâ per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriori tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est ut nullus sit motus æquabilis quo tempus accurate mensuretur; Accelerari & Retardari possunt motus omnes; sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem certe est duratio vel perseverantia existentiæ rerum, sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli. Proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per æquationem Astronomicam. In hoc enim incubuere Astronomi, ut ex inæqualibus corporum cœlestium motibus, motum circa aliquod centrum æquabilem reperiant; unde etiam durationem æquabiliter fluentem facilius & accuratius mensurent.

(4.) Spatium Absolutum, Verum, & Mathematicum est penetrabilis, indiscerpibilis, immobilis, sibi ubique similis, æterna, & infinita Extensio.

Nunquid hujusmodi Extensum a Corpore diversum reverà existat necne alia est quæstio: Hoc saltem ab omnibus sanis concedendum, hanc esse communem Spatii apud omnes notionem, atque adeo esse inter definitiones reponendum. Sicut enim Geometræ Circulum, Tri-

Triangulum, Quadratum, *&c.* primo in limine definiunt; an autem extent vel exstare possint hujusmodi figuræ parum laborant; Ita Spatii aliqualis descriptio erat præmittenda, ne de verbis lis aliqua postmodum oriretur: Ut ita deinde nunquid hujusmodi spatium a materia distinctum revera existat commodius disputetur.

(5.) Spatium Relativum (quod & *Locus*, ut opinor, non raro dicitur) est spatii Absoluti Mensura, seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur.

Ut dimensio spatii subterranei, aerei, vel cœlestis, per situm suum ad Terram definita. Idem sunt spatium Absolutum & Relativum specie & magnitudine, sed non permanent Idem semper numero: hoc est, Si cubiculi cujusvis spatium contentum seu cavitatem designamus, quocunque moveatur cubiculum Cavitas seu spatium intra ejus parietes inclusum ejusdem semper erit naturæ, propter spatii naturam sibi ubique similarem; & ejusdem magnitudinis; propter datam continentis magnitudinem. Non vero idem semper manet spatium numero; Ex motu enim cubiculi mutabitur illud perpetuo. Eodem modo, Si terra motu annuo circa Solem revolvat, Spatium aeris nostri, quod relative & respectu terræ idem semper manet, hoc est, ejusdem est naturæ & quantitatis, nunc erit una pars spatii absoluti, in quam aer transit, nunc alia; & sic absolute & reipsa mutabitur perpetuo. Ut vero partium temporis Ordo est immutabilis, sic etiam est Ordo partium spatii: Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur, ut ita dicamus, de se ipsis. Nam Tempora & Spatia sunt sui ipsorum, & rerum omnium quasi Loca: In tempore quoad ordinem successionis, in spatio quoad ordinem situs locantur universa: De illorum essentia est ut sint Loca; & Loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt itaque absoluta Loca, & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus. Verum, quoniam hæ partes,

tes ſpatii videri nequeant, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui, earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles; ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ut immobile ſpectamus, definimus loca univerſa. Deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur: nec incommode in rebus humanis. In rebus autem Philoſophicis abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri enim poteſt ut nullum reverà quieſcat corpus, ad quod loca motuſque hoc modo referantur.

(6.) Locus Abſolutus eſt pars Spatii abſoluti quam corpus occupat.

(7.) Locus Relativus eſt pars Spatii relativi quam corpus occupat. Dicimus Locum eſſe *Partem ſpatii*, non *Situm corporis*, vel Superficiem ambientem, uti nonnulli eum definierunt. Nam ſolidorum æqualium æqualia ſemper ſunt Loca; & eadem materiæ quantitas eandem ſemper Spatii quantitatem poſſidet; qualiſcunque ſit figuræ vel denſitatis. Ut ex. gr. ſphæræ & cubi ejuſdem magnitudinis abſolutæ æqualia erunt loca, quæ adimplent & adæquant, licet ſuperficies ambientes ob figurarum & proinde ſuperficierum diſſimilitudinem ſint inæquales; atque ita in omnibus. Motus etiam Totius idem eſt cum ſumma motuum omnium Partium; hoc eſt tranſlatio Totius de loco ſuo eadem eſt cum ſumma vel aggregato tranſlationum Partium omnium de locis ſuis: adeoque locus Totius idem cum ſumma locorum Partium; & propterea internus & in corpore toto. Situs verò proprie loquendo quantitatem non habent, nec majores & minores dicuntur, neque tam ſunt loca quam affectiones locorum.

(8.) Motus Abſolutus eſt Tranſlatio corporis vel ſubſtantiæ cujuſque de loco abſoluto, vel ſpatio immobili, in locum abſolutum, vel ſpatium aliud immobile.

(9.) Motus Relativus eſt Tranſlatio Corporis de loco relativo, vel ſpatio mobili, in locum relativum vel

ſpa-

ſpatium aliud mobile: Sive Tranſlatio corporis de viciniâ corporum ambientium in viciniam aliorum; ſive demum Tranſlatio corporis de ſitu inter alia corpora proprio in alium ſitum.

Sic in navi quæ velis paſſis fertur Relativus corporis Locus eſt navis regio illa in qua corpus verſatur; ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus adimplet, quæque adeo movetur una cum navi: Et Quies Relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione, vel parte cavitatis. At Quies Vera eſt perpanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua navis ipſa, una cum cavitate ſua, & contentis univerſis movetur. Unde ſi terra vere quieſceret, corpus quod relative quieſcat in navi, moveretur verè & abſolutè ea cum velocitate qua navis movebatur in terra.

Sin Terra quoque moveatur, Orietur verus & abſolutus corporis motus partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto; partim ex relativis motibus, tum navis in terrâ, tum corporis in navi; Et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terrâ. Ut ſi terræ pars illa ubi navis verſatur moveatur verè in Orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in Occidentem cum velocitate partium 10; Nauta autem ambulet in navi Orientem verſus cum velocitatis parte una: Movebitur Nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum partibus velocitatis 10001 in Orientem, & relative in terra Occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Feb. 28. 170$\frac{1}{4}$.

IV.

DEfinitiones nonnullas Philoſophiæ Newtonianæ præmittendas nuperrime propoſuimus. Nunc autem Scholium Generale definitionum ultimam & penultimam ſpectans ſupperaddemus.

Scholium Generale. Diſtinguuntur Quies & Motus Abſoluti & Relativi ab invicem per eorum proprietates,

tates, causas, & effectus. Quietis Absolutæ proprietas est quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se: Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus fixarum aut longe ultra quiescat absolute, sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris utrum horum aliquod ad longinquum illud corpus datam positionem servet, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit. Motûs absoluti Proprietas est quod partes quæ datas servant positiones ad tota participant motus eorundem totorum: Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motûs, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum: Igitur motis corporibus ambientibus moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia ambientium corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur: Debent corpora illa ambientia non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere: Alioquin Inclusa omnia præter translationem e vicinia ambientium participabunt etiam ambientium motus veros, & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem inferiorem, vel ut cortex ad nucleum: moto autem cortice nucleus etiam absque translatione de vicinia corticis, ceu pars totius unà movetur. Præcedenti proprietati affinis est quod moto loco relativo moveatur unà locatum; adeoque corpus quod de loco moto movetur participat loci sui motum. Sic si quis in navi dum velis passis fertur huc illuc obambulet, motus respectu terræ vel litorum major est vel minor prout in eandem partem cum navi vel in partem contrariam tendit: Si vero consistat in certa navis parte, participat motum navis, & eadem cum eâ celeritate progreditur: Si in eandem atque navis partem tendat, quoad terram celerius quam navis ipsa movebitur; si in contrariam, tardius: Et ita de motu in ipsa terra, si terra moveatur,

tur, ratiocinari oportet. Igitur motus omnes qui de locis motis fiunt sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum; & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps usquedum perveniatur ad locum immotum; ut in exemplis supra memoratis patet. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: Et propterea motus hosce absolutos ad loca immota, relativos verò ad loca mobilia infra referemus. Loca autem immota non sunt nisi quæ omnes ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem, atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appellamus.

Causæ quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas. Cum enim Materiæ pars quævis sit iners & merè passiva, sine vi aliunde impressâ moveri nequit, nec deturbari e statu suo potest sine vi aliqua quæ statum mutet. At motus relativi, quales solum agnoscit Cartesius, generari & mutari possunt absque viribus in corpora ipsa impressis. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua horum quies vel motus relativus consistit. Sic quidem ad motum fixarum stellarum relativum sufficit, secundum Cartesium, terram solum circumrotari; & ad terræ quietem sufficit quod in Vortice Solari delata easdem materiæ subtilis partes ambientes habeat, licet unà cum illis quotannis eclipticam perlustret, & circa Solem absolute moveatur. Rursus, Motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur: at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur, ut situs relativus conservetur, conservabitur etiam relatio, in qua motus relativus iste consistit. Ut si systema corporum modo quocunque inter se moveatur,

&

& vis æqualis in æquales ſyſtematis partes ſecundum lineas parallelas agat, licet vis iſta motum verum cujuſque partis reapſe mutet, relativum tamen non mutabit: æqualiter enim & per lineas parallelas agendo ſitus & motus partium relativi inter ſe iiſdem manebunt qui prius. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus, ubi verus conſervatur; motuum ſcilicet corporum aliorum mutatione; & conſervari, ubi verus mutatur; ut in exemplo nuperrime allato videre eſt: & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt: In vero autem & abſoluto majores ſunt vel minores pro quantitate motûs. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, ita ut vaſis fundum ſemper horizonti parallelum maneat, & axis motus ſit eidem perpendicularis, donec filum vel funis a contorſione admodum rigeſcat; Dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; Tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, uti prius; & filo ſe relaxante diutius perſeveret in hoc motu; Superficies aquæ ſub initio plana erit, & horizonti parallela, quemadmodum ante motum vaſis: At poſtquam vi in aquam paulatim impreſſa effecit vas ut aqua etiam ſenſibiliter, ad inſtar vorticis, revolvi incipiat, recedet ipſa paulatim e medio, aſcendetque ad latera vaſis figuram concavam induens, ut experientia monſtrabit; & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones æqualibus cum vaſe temporibus peragendo quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus. Licet enim receſſio ab axe motus ſit per ſe axi perpendicularis, cum tamen vas ibidem vim cohibeat, imprimetur in particulas proximas, & ubi datur locus evadet ſenſibilis: Et quoniam motus vere circularis major erit in particulis aquæ a centro remotiſſimis, utpote iis primo & potiſſimum a vaſe communicatus; propter

er majores circulos celeritatemque majorem versus cir-
umferentiam, partes remotiores a centro recedent magis:
eoque Oritur iste aquæ ascensus ex motu vero circu-
ri, & per conatum hunc recedendi a centro innotescit
mensuratur. Qui quidem motus verus circularis
t hic loci motui relativo omninò contrarius. Initio
im, ubi maximus erat motus relativus in vase, quod
mota penè aqua solum gyrabatur, & per conse-
ens aqua ipsa contenta quoad vas celerrime in partem
ntrariam movebatur respective, sine vero motu; Tum
e temporis motus ille relativus nullum excitabat co-
tum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumfe-
ntiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat;
propterea motus illius circularis verus nondum sen-
iliter inceperat: Postea vero simul ac aquæ motus re-
ivus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat co-
tum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat
otum illius circularem verum, perpetuo crescentem, ac
dem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase
lative: Igitur conatus iste non pendet a translatione
uæ respectu vasis ambientis, (dum illud solum re-
râ movetur, & motus tantum relativus aquæ immotæ
inde affingitur.) Et propterea motus circularis ve-
s per tales translationes definiri nequit. Unicus est
rporis cujusque revolventis motus verè circularis, co-
ui unico tanquam proprio & adæquato effectui re-
ndens: motus autem relativi pro variis ad varia cor-
a relationibus; situque, prout hoc vel illud respicit,
erso, innumeri sunt, & in omnes partes simul tendunt;
ue relationum ad instar effectibus veris omninò de-
uuntur, nisi quatenus de vero illo & unico motu
ticipant. Unde & in systemate eorum qui cœlos
tros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, &
netas secum deferre, Planetæ & singulæ cœlorum par-
, quæ relative quidem in cœlis suis proximis quiescunt,
ventur vere: Mutant enim positiones suas ad invi-
n, ob diversas revolutionum periodos, secus quam

 fit

sit in vere quiescentibus; unaque cum cœlis delati participant eorum motus; & ut partes revolventium totorum ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ, quas jamjam a veris distinximus, non sunt eæ ipsæ quantitates quarum nomina præ se ferunt; uti spatium intra cubiculi parietes contentum, stellarum motus diurnus, &c. sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco mensuratarum & verarum quantitatum utitur. At si ex usu sunt definiendæ verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci, & Motûs, proprie intelligendæ sunt hæ mensuræ, & sermo erit insolens & pure mathematicus, si quantitates mensuratæ vel veræ hic subintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis qui voces hasce de absolutis quantitatibus mensuratis ibi interpretantur, ut ii qui ex quiete terræ & motu Solis in Scripturis assignato de vero mundi systemate, contra evidentes Philosophiæ & Astronomiæ rationes, disputare solent; ut & ii, si qui ideo insaniant, qui eò quod *tempus non amplius futurum* prædictum fuerit, ideo & ipsam æternam durationem seu tempus absolutum in nihilum abiturum colligunt. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus corporum veros cognoscere & ab apparentibus actu discriminare, est quidem difficillimum; propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata: Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ; partim ex viribus, quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo ad datam ab invicem distantiam, filo intercedente connexi, revolverentur, circa commune duorum gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motûs, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde, si vires quælibet æquales in alternas,

hoc

hoc est, sibi e diametro oppositas, globorum facies ad
motum circularem augendum vel minuendum simul
nprimerentur; hoc est, si alterum in partem unam, al-
erum in contrariam simul impelleretur, ex aucta vel
iminuta fili tensione augmentum vel decrementum mo-
ûs circularis innotesceret. Et inde tandem inveniri
ossent facies globorum, in quas vires imprimi deberent
t motus maxime augeretur, id est, facies posticæ, sive
uæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem fa-
iebus quæ sequuntur, iisque per consequens quæ sunt
ppositæ & præcedunt, cognoscetur determinatio mo-
ûs. In hunc modum inveniri posset & quantitas &
eterminatio motûs hujus circularis in vacuo quovis
nmenso, ubi nihil extaret sensibile & externum, quo
um globi conferri possent. Si jam constituerentur in
atio illo corpora aliqua longinqua datam inter se posi-
onem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus
ostris; sciri quidem non posset ex relativa globorum
anslatione inter corpora utrum his an illis tribuendus
set motus, uti nos in Terra per motum quemvis stel-
rum fixarum apparentem determinare non possumus,
m eæ vel terra ipsa revera moveatur: At si attende-
tur ad filum, & inventum esset tensionem ejus illam
sam esse quam motus globorum requireret, conclu-
re liceret motum esse globorum; & tum demum,
translatione globorum inter corpora determina-
nem hujus motus colligere. Cum enim ex ten-
ne fili constaret motum istum esse vere globorum, &
n corporum longinquorum; per ista corpora ut im-
ta jure jam spectata facile determinabitur motus glo-
rum, tum quoad velocitatem, tum quoad directio-
n. Et hac quidem ratione annuum telluris motum,
ote vi centripetæ in Solem exacte proportionalem,
ligimus; & fixarum quietem ex annuo telluris motu fa-
e quoque colligimus. Cognitis itaque telluris motu &
arum quiete, facile est annui motus velocitatem & dire-
onem ex stellis fixis exinde deducere. Quo autem pacto

 mo-

motus veri ex eorum caufis, effectibus, & differentiis apparentibus funt colligendi; & contra, quo pacto ex motibus feu veris feu apparentibus eorum caufæ & effectus colligendi funt, fufius in fequentibus docebitur.

(10.) Quantitas materiæ eft menfura ejufdem orta ex ipfius denfitate & magnitudine conjunctim.

Aer duplo denfior in duplo fpatio quadruplus eft. Et fi vas cubicum aerem contineat, qui deinde in cubum minorem compreffione reducatur, denfitas in minore cubo, erit ad denfitatem in majore, ut major cubus ad minorem; five in ratione laterum cubicorum triplicata reciproce: diftantiæque particularum aeris fimilium fimiliterque pofitarum erit in ipfa laterum cubicorum ratione reciproce. Idem intellige de nive & pulveribus per compreffionem vel liquefactionem condenfatis; & par eft ratio corporum omnium quæ per caufas quafcunque diverfimodè condenfantur. Medii interea, fi quod fuerit, interftitia partium libere pervadentis hic nullam rationem habemus. Hanc autem materiæ quantitatem, ex denfitate & magnitudine conjunctis æftimandam, fub nomine *corporis* vel *maffæ* in fequentibus paffim intelligimus. Innotefcit ea per corporis cujufque pondus: æqualis enim hujufce materiæ quantitas, qualis demum cunque fit, æqualiter femper in terram gravitat, ponderique eft ad amuffim proportionalis; uti per experimenta pendulorum accuratiffime inftituta conftat: prout in fequentibus docebitur. Unde fane, ut hoc obiter annotemus, certum eft, aut nullum medium æthereum corporum poros permeare, aut faltem, fi quod fit, cum nullatenus gravitet, nec corporum motui obftet, illud pari cum corpore vel materia priore cenfu haberi non debere; imo nec propriè loquendo corporis vel materiæ nomen mereri. Sed de his olim plura occurrent explicanda.

(11.) Quantitas motûs eft menfura ejufdem orta ex velocitate & quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius eft fumma motuum in partibus fingulis; adeóque in corpore duplo majore, æquali cum

veloci-

elocitate, duplus est; & duplâ cum velocitate qua-
ruplus. Quantitas igitur materiæ est rectangulo densi-
tis in magnitudinem ductæ æqualis; & Quantitas mo-
s est rectangulo velocitatis in materiæ quantitatem du-
æ æqualis. Unde sanè vires machinarum omnium fa-
llime deducuntur: Nam ubicunque in machinarum æ-
uilibrio corpus majus est, ibi corporis istius erit tantò
inor celeritas; & ubi corpus minus est, ibi corporis
tius tanto major erit celeritas; ita ut quantitas motûs
corpore in velocitatem suam ducto sit semper utrin-
ue æqualis; uti inferius pluribus dicetur.

(12.) Materiæ Vis insita est potentia resistendi qua
rpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in
atu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in di-
ctum per lineam rectam.

Hæc vis proportionalis est suo corpori, neque differt
uicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi: per
ertiam materiæ fit ut corpus omni de statu suo vel quies-
ndi, vel in motu semel incepto pergendi difficulter detur-
tur: Unde etiam hæc vis insita nomine significantissimo
is Inertiæ dici possit. Exercet verò Corpus hanc vim
lummodo in mutatione statûs sui, per vim aliam in se
pressam facta; estque exercitium ejus sub diverso
spectu & Resistentia & Impetus: *Resistentia*, quatenus
rpus ad conservandum statum suum reluctatur vi im-
essæ; *Impetus*, quatenus corpus idem vi resistentis
staculi difficulter cedendo conatur statum ejus mu-
e. Resistentia quidem quiescentibus, & Impetus
oventibus propriè loquendo tribuendus videtur; & Im-
tum quemcunque, ubi corporum alterum quiescit, ex
oti corporis viribus positivis, potius quam ex quiescen-
negativis lubentius deduxero.

(13.) Vis impressa est actio in corpus exercita ad
utandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uni-
rmiter in directum.

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem
rmanet in corpore: Perseverat enim corpus in statu

 omni

omni novo per solam vim inertiæ. Est autem Vis impressa diversarum originum; ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

(14.) Vis centripeta est qua corpus versus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunque tendit.

Hujus generis est gravitas, quâ corpus tendit ad centrum terræ; vis magnetica, qua ferrum petit centrum magnetis: Attractio vel Tensio fili ad lapidem in fundo circumactum retinendum. Ejusdem etiam generis est vis illa, quæcunque sit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in curvis lineis revolvi coguntur. Est autem Vis Centripetæ Quantitas trium generum; *Vis Absoluta*, *Vis Acceleratrix*, & *Vis Motrix*.

(15.) Vis Centripetæ quantitas *Absoluta* est ejusdem mensura major vel minor pro efficaciâ causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu; Uti virtus magnemajor in uno magnete, minor in alio; major in majori, cæteris paribus, minor in minori: attractio seu tensio fili major in gyratione majoris lapidis, minor in gyratione minoris; & major in ejusdem lapidis gyratione celeriori, minor in tardiori. Et more non absimili facile fuerit concipere gravitatem corporum in Solem paribus distantiis majorem esse posse quam in Terram aut Planetam quemvis, propter ingentem nimirum corporis solaris magnitudinem, uti deinceps explicabitur.

(16.) Vis centripetæ, centrum quodvis respicientis, quantitas *Acceleratrix* est ipsius mensura in diversis a centro distantiis, velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus ejusdem magnetis (cujus proinde quantitas absoluta non mutatur) major in minori distantia, minor in majori: Vis gravitans in superficie telluris paulò major circa polos, & paulò minor circa æquatorem; uti inferius patebit: Major quoque in superficie terræ; in majoribus verò a centro distantiis multò minor; quemadmodum infra ostendetur. Vis autem hæc gravita-

vitatis Acceleratrix in æqualibus a centro telluris distantiis est undique eadem, propterea quod corpora omnia cadentia, gravia an levia, magna an parva, fluida an solida, sublatâ nempe aeris resistentiâ, æqualiter acceleret. Omnia enim corpora in tubis vacuis cadentia eadem spatia eodem tempore ubique descendunt: quod ipsum quoque ex corporum quorumcunque pendulorum in eodem circulo vel cycloide simul oscillantium motu clarissime demonstratur.

(17.) Vis centripetæ quantitas *Motrix* est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc vis est corporis totius centripetentia, pressio, conatus, vel propensio in centrum; & corporis *Pondus* dicitur. Innotescit autem semper per vim ipsi contrariam & æqualem quâ descensus corporis impediri potest. Vis ergo centripeta *Absoluta* centralis cujusque corporis est major aut minor, prout corpus centrale est majus aut minus, aut saltem magis aut minus potens & efficax: Vis *Acceleratrix* est ea ipsa vis perpetuo decrescens crescente distantia, & crescens decrescente distantia: Vis vero *Motrix*, seu ipsum Pondus, oritur ex vi acceleratrice in corpus ducta. Unde, data vi centripeta absoluta, erit in dato corpore vis motrix, ut vis acceleratrix; & data vi acceleratrice ut Corpus. Hasce autem virium quantitates brevitatis causa nominare licet vires *Motrices*, *Acceleratrices*, & *Absolutas*; & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium; nimirum, vim *motricem* ad corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex conatibus & propensionibus omnium partium compositum: & vim *acceleratricem* ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam de centro per loca singula in circuitu diffusam ad movenda corpora, quæ in ipsis sunt; & vim *absolutam* ad centrum vel corpus centrale, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vi-

vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus illud centrale, (quale est Magnes in centro vis Magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis,) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus saltem est hic conceptus, & nobis impræsentiarum sufficiens: Nam virium causas & sedes physicas jam non expendimus. Est igitur Vis acceleratrix ad vim motricem, ut celeritas ad motum: Oritur enim quantitas motûs ex celeritate ducta in quantitatem materiæ; & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ: Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius: Unde juxta superficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix, seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: At si in regiones ascendatur, ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus, ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus. Porro impulsus & attractiones eodem sensu acceleratrices & motrices nominamus. Voces autem attractionis, impulsûs, vel propensionis cujuscunque in centrum indifferenter & pro se mutuò promiscuè usurpamus; Has vires non physicè sed mathematicè tantum considerando. Unde Caveat Lector, ne per hujusmodi voces cogitet nos speciem vel modum actionis, causamve aut rationem physicam alicubi definire; vel centris, quæ sunt puncta mathematica, vires verè & physicè tribuere; si fortè aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerimus. Hactenus Definitiones Philosophiæ Newtonianæ præmittendas exhibuimus: *Axiomata*, sive *Motuum Leges* in terminum proximum differemus.

Feb. 28. 170$\frac{1}{4}$.

V.

Axiomata ſive Motuum Leges.

(1.) CORPUS omne perſeverat in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Projectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum: Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aere aut ab inæquabili ſuperficie, cui inſiſtit, retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius. Hæc quidem motûs regula, omnium maxime fundamentalis, eſt ſanè ex materiæ inerti & paſſiva natura evidentiſſima. Si quis enim corpus aliquod quieſcens ſine vi aliqua impreſſa moveri, aut corpus motum ſine vi aliqua reſiſtente momento temporis quieſcere ſupponeret, non ſine ſtupore illud & miraculi inſtar natura duce haberet; cum viribus externis ad motum ſive generandum ſive ſiſtendum opus eſſe non poſſit non exiſtimare.

(2.) Omnis motus per ſe eſt rectilinearis, ſive in plagam certam determinatus.

Hoc ex ipſa motûs natura ſequitur; cum motus ſine ejuſdem in plagam aliquam determinatione concipi nequeat. ſi autem ſemel in plagam aliquam directus intelligatur, perſeverabit, ex lege priore, corpus ſecundum eandem rectam moveri, donec vires impreſſæ ab iſta directione deturbent.

Si quando autem per curvam lineam corpus moveatnr, neceſſe eſt ut curvatura iſta ex viribus extraneis perpetuo impreſſis oriatur; atque adeo ſimul ac vires illæ extraneæ ceſſant, corpus per curvam etiam moveri ceſ-

ſabit,

ſabit, & per rectam lineam, curvam in puncto virium ceſſantium ultimò tangentem, ſive ſecundum directionem ſuam ultimam rectilinearem, movebitur. Sic ſane in lapide à funda circumacto res ſe habet. Quamprimum enim lapis a funda liberatur, non pergit in circulo quem prius deſcripſerat, ſed per circuli tangentem abit: &, vi gravitatis cum vi projectili jam compoſita, lineam Parabolicam deſcribit; uti olim demonſtrabitur.

(3.) Omnia corpora in gyros acta conantur a centro motûs ſui recedere; & quò gyratio eſt celerior, eò magis ab iſto centro recedere conantur.

Cum enim Corpora per ſe tendant ad motum rectilinearem, ſive per curvarum, quas deſcribunt, tangentes; & cum omnes tangentium partes a centro motûs longius abſunt, quam partes curvarum, ad quas retrahuntur a viribus centripetis, perſpicuum eſt conatum iſtum ſecundum tangentes abeundi corpora ab iſto centro perpetuo retrahere, & eſſe conatui contrario, ſive vi centripetæ ſuſtinenti & æquipollenti ad amuſſim æqualem.

(4.) Mutatio motûs proportionalis eſt vi motrici impreſſæ; & fit ſecundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit; ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus, quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea moveatur, motui ejus vel conſpiranti additur, & velocitatem auget; vel contrario ſubducitur, & velocitatem minuit; vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur: Si itaque cum eo aliquantulum conſpiret, velocitatem aliquantulum adaugebit; ſi ei aliquantulum opponatur, eandem aliquantulum diminuet: ſin ei ad angulos rectos occurrat, velocitatem in linea prima ſpectatam nullatenus aut adaugebit, aut diminuet.

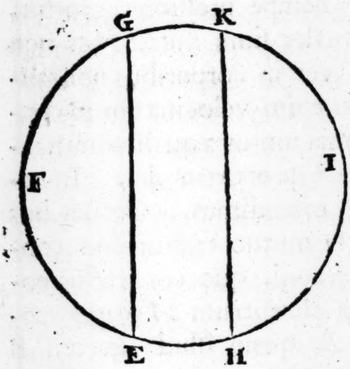
(5.) Acti-

(5.) Actioni contraria semper & æqualis est reactio: Hoc est corporum duorum actiones in se mutuo, sive sint impulsus, sive attractiones, semper æquales sunt, & in partes contrarias diriguntur.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premat, premitur & hujus digitus æqualiter à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahat, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius, quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in aliud impingens motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam, vi alterius, ob æqualitatem nempe pressionis mutuæ, subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non *velocitatum*, sed *motuum*; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. In attractionibus rem sic breviter ostendimus. Corporibus duobus quibusvis *A* & *B* se mutuo trahentibus concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A*, quam pressione corporis *B*; proindéque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque systema corporum duorum & obstaculi moveri in directum in partes versus *B*, motuque in spatiis liberis semper accelerato abire in infinitum; quod est absurdum, & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum; proindéque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Vel si nullum

ad-

adsit obstaculum res eodem modo se habebit; nam motus fortior debiliorem in occursu vincet, & utrumque corpus in eandem partem, aucta semper celeritate, perget. Unde aut nulla in corporum systemate, ubi lex prima obtinet, quale est systema Solare, datur corporum attractio; quam tamen infra dari satis demonstrabimus; aut est mutua semper in partes contrarias, & utrinque æqualis. Rem tentavit Cl. Newtonus in Magnete & Ferro. Ubi hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita in aqua stagnante juxta fluitabant, neutrum propellebat alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebant conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescebant. Sic etiam Gravitas inter terram & ejus partes mutua est & æqualis. Si Globus terræ *HEFGKI* in partes duas inæquales per lineam *GE* dividatur, Gravitas partis *EGF* in terram reliquam æqualis erit gravitati terræ reliquæ in hanc partem: Id quod hocce Argumento convincitur. Nam concipe terram planis parallelis in partes tres *EGF HKI EGKH* secari; quarum *EGF* & *HKI* sibi mutuò æquales sint, & parti mediæ *EGKH* incumbant. Et manifestum erit quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendet, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicamus, suspenditur, & quiescit. Pars autem extrema *HKI* toto suo pondere incumbit in partem mediam, & urget illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua summa partium *HKI* & *EGKH* tendit versus partem tertiam *EGF*, æqualis est ponderi partis *HKI* & *EGKH*, id est, ponderi partis tertiæ *EGF*. Igitur si terra plano quovis *EG* in partes duas *EGF*



GI ſecetur, vis quâ pars major *EGI* tendit in parm minorem *EGF*, æqualis eſt vi quâ pars minor *EGF* ndit in majorem *EGI*; hoc eſt, pondera partium in ſe utuo ſunt æqualia; & niſi pondera illa æqualia eſſent, rra tota ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo airet in infinitum. Quod, ut prius, eſt abſurdum, & Legi primæ contrarium.

(6.) Si corporum duorum æqualium elaterii experium, alterum motum alteri quieſcenti occurrat, in ccurſu utraque cum dimidia moti corporis velociate in eandem partem ſimul progredientur.

Corpus enim in motu poſitum in occurſu eouſque de motu ſuo alteri quieſcenti communicabit, donec eâdem cum ipſo celeritate abeat. Dum enim corporis in motu oſiti velocitas major eſt velocitate quieſcentis, impellet ipſum, & ulterius accelerabit; quamprimum autem quieſcens æquali velocitate abeat, ultra impellere non poteſt, ſed unà comitabitur. Cum ergo corporis prioris motus in duo æqualia corpora jam diviſus ſupponatur, neceſſe eſt ut velocitas utrique communis ſit prioris dimidia.

(7.) Si corpora duo æqualia, elaterii expertia, eadem velocitate ſibi mutuò directe occurrant, ambo poſt colliſionem quieſcent.

Quantum enim alterum progreditur, tantum ab altero repellitur; & æquales motûs quantitates in partes oppoſitas tendentes ſeſe mutuo omnino adæquabunt, & ſe invicem tollent: unde cum nulla jam ſit novi motus cauſa, corpora utraque omnino quieſcent. Perit ergo motus in hoc caſu, nec eadem ejuſdem ſemper quantitas in mundo manet; quod voluit Carteſius.

(8.) Si duo corpora inæqualia, elaterii expertia, ſibi mutuò eâ velocitate occurrant, ut quantùm corpus alterum magnitudine ſuperet, tantùm ab altero celeritate vincatur; ſeu ſi velocitates ſint corporibus reciprocæ, utraque poſt occurſum, ut prius, quieſcent.

Cum enim quantitates motus in partes contrarias di-

recti

recti sint in hoc casu utrinque æquales, se mutuo ut prius omnino destruent, & peribit motus, ut in casu priori.

(9.) Si corpus motum in quiescens impingat (utraque autem elaterii expertia intelligantur) utcunque sint mole & materiæ quantitate inæqualia; utraque post occursum communi velocitate in easdem partes ferentur; ut in Lege sexta; & velocitas communis tantùm minuetur, quantum corpora utraque simul sumpta corpore prius moto sunt majora. Cum enim motus universus prioris distributus jam in duo intelligatur, velocitas tantùm minuetur, quantùm materiæ movendæ quantitas augetur.

Corollarium. Datis itaque corporibus, dabitur unà & velocitatis moti corporis ante occursum, ad communem velocitatem motorum post occursum ratio. Nam ut Corpora utraque simul, ad Corpus motum, ita Corporis moti velocitas ante occursum, ad communem duorum velocitatem post occursum.

(10.) Si corpora duo, elaterii expertia, inæqualia, æquali autem velocitate in partes oppositas mota, sibi mutuò occurrant, quantitas motûs post occursum in utroque simul erit tantùm motuum priorum differentia. Quantitas enim motûs ex utravis parte minor æquali quantitati motus ex parte altera æquivalebit, eamque ut prius destruet: relinquetur itaque post occursum sola motuum differentia, tanquam unica motuum post occursum causa. Atque idem erit casus ac si corpus ubi major erat motûs quantitas cum ista motuum differentia in alterum quiescens impingat, & eodem calculo post occursum æstimanda.

(11.) Si corpora duo, elaterii expertia, æqualia, inæquali velocitate in easdem partes moveantur, post occursum manebit eadem motûs quantitas vel summa; velocitas autem communis erit dimidia velocitatis prioris utriusque simul sumptæ.

Excessus enim velocitatis in utrumque corpus æqualiter distribuetur; & proinde utrumque corpus mediocri velocitate post occursum simul abibit.

(12.) Si

(12.) Si duorum corporum, elaterii expertium, in-
æqualium, majus assequatur minus, communis veloci-
tas post occursum major erit dimidia summa velocita-
tum. Contra vero eveniet si corpus celerius motum
altero ponatur minus: tum enim communis velocitas
postea erit ista dimidia summa minor.

Nam si corpora æqualia essent, communis velocitas
post occursum, ut jam vidimus, esset isti dimidiæ
summæ æqualis. Si ergo inæqualia ponantur, necesse
est ut major minorve velocitatis quantitas pro celerioris
corporis magnitudine aut parvitate oriatur.

Corollarium. Datis itaque utriusque corporis velo-
citate & magnitudine ante occursum, facile fuerit com-
munem utriusque velocitatem post occursum calculo
ubique indicare. Est enim ut Semissis Summæ corpo-
rum, ad corpus minus, ita Semissis Summæ motuum
ad velocitatem communem post occursum. Exempli
gratia, sit Corpus insequens corporis præcedentis &
magnitudine & velocitate duplum: erit ergo Semissis
Summæ corporum corporis minoris sesquialtera, & Se-
missis Summæ motuum ad minoris motum ut $2\frac{1}{2}$ ad 1.
Unde, per auream regulam, velocitas communis post
occursum, erit ad velocitatem minoris ante occursum, ut
$\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$ ad unitatem. Nam $1\frac{1}{2} : 1 :: 3 : 2 :: 2\frac{1}{2} : \frac{5}{3} =$
$1\frac{2}{3}$. Si corpus insequens sit ad corpus præcedens ut 7 ad 3;
& si velocitas corporis insequentis sit ad velocitatem
præcedentis ut 13 ad 2. Erit Dimidium summæ cor-
porum $= 5$. Corpus minus $= 3$. Motuum Summæ
Dimidium $48\frac{1}{2}$. Ergo erit communis velocitas post
occursum, ad velocitatem minoris antea ut $29\frac{1}{3}$ ad 2.
sive $14\frac{2}{3}$ ad 1. Nam $5 : 3 :: 48\frac{1}{2} : 29\frac{1}{3} :: 14\frac{2}{3} : 1$.

Scholium. Hæ sunt veræ motuum Leges in corpo-
ribus aliquantulum cedentibus, quæ se non restituunt,
seu nulla vi Elastica donantur; quæ forte perfecte duris,
modo non sint Elastica, etiam convenient. *Elasticorum*
autem corporum, quæ eadem vi se restituunt qua com-
primuntur, quæque proinde *perfecte Elastica* dici debent,

Re-

Regulæ seu leges motus sunt a prioribus plane diversæ; quas itaque seorsim tractare & exponere oportebit. Cum autem corporum horum collisiones, phænomena & difficiliora & insigniora exhibeant; & cum Vir summus Cl. Hugenius easdem tractatu peculiari posthumo exponere & demonstrare aggressus sit, neque tamen sine magnis ambagibus longâque rationum & figurarum pompa, pro antiquorum Geometrarum more, absolverit, Libet Elasticorum Corporum Leges motus secundum Hugenii ordinem tradere, & ejusdem propositiones singulas breviori, &, ni fallor, magis naturali methodo demonstrare: ita ut vel ipsi Tyrones harum legum certitudinem & originem physicam aliquatenus intelligant. Esto itaque Corporum perfecte Elasticorum Lex motus prima & generalis.

(13.) Si Corpori perfecte elastico quiescenti aliud æquale corpus occurrat, post contactum hoc quidem quiescet; quiescenti verò acquiretur eadem quæ fuit in impellente celeritas. Corpus enim impellens motûs sui semissem impulsu directo, absque elaterii consideratione, quiescenti ex motûs lege 6ª, communicabit: & pari cum eodem passu incedere incipiet; & propter elaterium vi communicatæ par, motus semissem alium eidem communicabit; unde motus in integrum communicatus erit motui impellentis priori æqualis. Et cum necessum sit ut quantum impingens aut agendo aut reagendo, hoc est, aut mero impulsu, aut vi elastica in quiescens transferat tantum de motu suo amittat, sequitur corpus impellens amisso motu suo progressivo quiescere debere, dum corpus quiescens motum illius lucretur.

Coroll. (1.) Si Corpus majus in minus incurrat, non quiescet prius, sed solummodò tardius movebitur; & quiescens majorem velocitatem quidem, sed minorem motûs quantitatem, quam in impellente fuerat, lucrabitur.

Coroll. (2.) Si corpus minus in majus incurrat non quiescet prius, sed regredietur; & quiescens minorem velocitatem quidem, sed majorem motûs quantitatem, quam in impellente fuerat, lucrabitur.

Coroll.

Coroll. (3.) Si corpus in motu positum in corpora
ura sibi contigua & quiescentia incurrat, omnia quies-
ent præter ultimum; quod pari, majori, minorive
eleritate cum impellente movebitur, prout scilicet cor-
us impellens corpori ultimo sit æquale, majus, mi-
usve. Hæc corollaria ex hac lege motus, sua quasi
onte sequuntur; nec proinde peculiari demonstratione
dmodum opus esse videtur.

(14.) Si corpora duo æqualia perfecte elastica inæ-
uali celeritate lata se mutuo impellant, sive in partes
asdem, sive in contrarias tendant, post contactum per-
nutatis invicem celeritatibus ferentur. Nimirum si in
artes easdem tendant, dempta utrinque celeritate utri-
ue communi, relinquetur sola celeritatum differentia,
anquam unica mutationis in conflictu causa; & cum
x lege priori omnis ista velocitas tardiori communicari
ebeat, sequitur quod & corpus impingens excessu isto
it necessario multandum, & corpus tardius motum ex-
essum istum sit lucraturum; hoc est, aliis quidem ver-
is sed eodem sensu, sequitur quod post contactum per-
nutatis invicem celeritatibus moveri debeant. Neque
æc Lex multo aliter in casu secundo, ubi corpora in
artes diversas lata, & sibi contrarie incurrentia po-
untur; est demonstranda. Dempta enim utrinque
elocitate utrique communi, quæ post conflictum in
artes contrarias tendet, & velocitatem utriusque pri-
em non mutabit, restabit, ut prius, velocitatis diffe-
ntia, tanquam unica mutandæ velocitatis causa: quæ
aque juxta legem priorem a velociore in tardius in in-
grum transferetur: unde ut prius, sequetur corpora e-
amnum post contactum permutatis celeritatibus per-
re debere.

(15.) Corpus quodcunque quamlibet magnum, a
uocunque corpore quamlibet exiguo, & qualicunque
eleritate impacto movetur. Hæc Lex motus est sane
xioma per se manifestum, nec demonstrationis indi-
ens.

(16.) Quoties duo corpora perfecte elastica inter se colliduntur, eadem est mutuo respectu discedentibus celeritas quæ fuit appropinquantibus: Sive verbis aliis sensu eodem, eadem est utriusque *velocitas*, non *absoluta*, sed eadem *velocitas* discedendi *respectiva* quæ fuit appropinquandi. Continet quidem hæc lex præcipuum etiam reliquarum motuum legum fundamentum; & hac methodo demonstrabitur. De æqualibus corporibus liquet propositum ex lege penultima, jamjam demonstrata: manent enim eo in casu ipsæ celeritates veræ & absolutæ, permutatis tantum sedibus; atque adeo ut celeritas discedendi respectivâ eadem sit quæ fuit appropinquandi est necessum. De inæqualibus res sic conficietur. Si corpus majus assequatur minus, aut quiescens, aut saltem tardius motum, communicabit quidem de motu suo corpori quiescenti, vel tardiori; sepositâ etiam elaterii consideratione; nec tamen quiescet: & dum inter communicandum una cum quiescente vel tardiori perget non cessabit & impulsu directo, & reactione elastica quiescens vel tardius illud corpus accelerare, donec eadem velocitate a se recedat qua prius motui suo obstiterat, & elaterium suum compresserat; hoc est, qua ipsum ad alterum appropinquarat. Hanc sane celeritatem corpus majus minori necessario imprimet; sed majorem imprimere nequit, (licet corpus minus per se sit majoris capax: quam primum enim corpus quiescens vel tardius motum velocitatis gradum impulsui sive velocitati respectivæ priori parem fuerit lucratum, effugiet illico; neque impulsum quemvis ulteriorem sustinebit aut morabitur. Si autem corpus minus assequatur majus, aut quiescens, aut tardius motum, fieri nequit ut corpus minus integrum velocitatis suæ excessum quiescenti vel tardiori imprimat: (illud enim eo tantum casu fit ubi corpora sunt æqualia, ut in lege 13ª & 14ª jam vidimus.) Perit autem inter communicandum motûs velocioris excessus, etiam sepositâ elaterii consideratione: Et dum eo pacto unâ progrediuntur

diuntur corpora, posterius in prius eousque reaget, donec eadem velocitate respectiva separentur, qua prius accesserant; Eatenus enim, nec ultra vires illæ elasticæ, impulsui pares, possunt; aut potius eatenus corpus minus reactionem patietur, nec ultra, prout in casu priori. In iis autem Corporibus quæ sibi mutuo inæquali utrumque velocitate occurrunt, demenda est utrinque velocitas utrique communis; utpote quæ velocitates *easdem* sed mutatis sedibus post conflictum generabit; tum autem relinquetur tantum velocitatum differentia, tanquam unica mutandæ velocitatis causa: quæ sane non cessabit & agendo & reagendo, corpora eadem celeritate respectiva a se invicem separare, qua prius accesserant. Rei cardo in eo ubique vertitur, ut Vires Elasticæ motui impresso ubique pares effectum suum integrum atque illibatum, nec ultra, ubique sortiantur. Quod aliter fieri non potest quam si velocitas recedendi respectiva, velocitati accedendi respectivæ ad amussim correspondeat.

(17.) Si duo corpora perfecte elastica eadem celeritate singula ad occursum revertantur, quâ ab impulsu resilierunt; singula post alterum impulsum eandem acquirent celeritatem quâ ferebantur ad occursum primum. Ob datam enim inter collidendum ictus vel conflictus magnitudinem, utpote velocitati respectivæ datæ parem, datur una rectangulum quoddam; cujus factores duo sunt distantiæ a puncto concursus, & primaria, & ea ad quam primo conflictu est reversum utrinque; si itaque rectangulum illud datum dividamus per distantiam primam tanquam *divisorem*, distantiam secundam, tanquam *quotum* obtinebimus: Sin per distantiam secundam, tanquam *divisorem*, dividamus, distantiam primam, tanquam *quotum* obtinebimus: & ita in perpetuum. Unde sequitur distantias istas dato tempore descriptas, sive velocitates accedendi & recedendi sibi mutuo respondere, & se invicem consequi.

 (18.) Cor-

(18.) Corporibus duobus sibi mutuo occurrentibus, sive elasticis, sive non elasticis, non semper post impulsum eadem motus quantitas in utroque simul sumpto conservatur, quæ fuit ante; sed vel augeri potest vel minui. Hanc motus legem, quæ contra Cartesium directe militat, è lege 7ª. prius deduximus, quoad corpora non elastica; & ex lege penultima de elasticis etiam sequitur. Cum enim motus quantitas ex celeritate in materiam ducta æstimetur; & cum in corporibus utcunque inæqualibus, & inæquali celeritate motis, ita tamen res se habeat, ut velocitatum summa sive velocitas respectiva maneat data, quantitas motus erit admodum inæqualis, prout corpus majus aut minus majorem velocitatis respectivæ integræ partem lucratur aut minorem; ut ex motuum calculo etiam mox instituendo clarius patebit.

(19.) Si corpus perfecte elasticum majus minori quiescenti occurrat, minorem ei velocitatem dabit quam duplam suæ. Cum enim post impulsum corpora eadem celeritate respectivâ a se invicem discedere debeant, qua ad invicem accesserant, hoc est in casu præsenti, qua corpus majus ante impulsum motum esset; si Velocitas quiescentis evaderet dupla velocitatis incurrentis, oporteret incurrens, post motum quiescenti communicatum, eadem celeritate sine ulla ejusdem jactura pergere qua prius. Quod est absurdum.

(20.) Si corpora duo perfecte elastica sibi ex adverso occurrant, quorum magnitudinibus celeritates contraria ratione respondeant, utrumque eadem qua accessit celeritate resiliet. Cum enim Vires quæ ex mero corporum impulsu sine elaterii consideratione oriuntur, sint utrinque æquales, se mutuo ex Lege 8ª substinebunt & destruent: Restabunt itaque solæ vires elasticæ; quæ cum sint utrinque & inter se, & motibus prioribus omnino æquales, æquales ex utraque parte motus generabunt. Atque adeo corpus utrumque eadem qua accesserat prius celeritate post occursum resiliet.

Scho-

Scholium. *Problema.* Datis corporibus duobus inæqualibus perfecte elaſticis ſibi directe occurrentibus, quorum utrumque, vel alterum tantum moveatur, dataque utriuſque celeritate, vel unius ſi alterum quieſcat, invenire celeritates quibus utraque poſt occurſum ferentur. Fiat nimirum ut Summa Corporum, ad duplum corporis ſecundi, ita celeritas accedendi reſpectiva data, ad celeritatem alteram. *Differentia* inter hanc ultimo repertam celeritatem, & celeritatem corporis primi ante impulſum, (vel uno caſu earum *ſumma* ubi nempe corpus primum in motu præcedit) dabit celeritatem corporis primi poſt occurſum: qua celeritate ex integra celeritate reſpectiva data ablata, reſidua erit celeritas ſecundi poſt occurſum. Regula autem hac methodo demonſtratur. Velocitas primi poſt occurſum erit velocitatis primi ante occurſum, & velocitatis integræ reſpectivæ differentia, ubi corpora æqualia ponuntur; ita ut ſumma corporum ſit duplo corpori ſecundo æqualis; ut ex lege 14. liquet. Patet itaque omnem differentiam, hoc eſt, motum corporis primi poſt occurſum, à differentia ſummæ corporum & dupli corporis ſecundi oriri, eidemque proinde eſſe proportionalem. Quod illud ipſum eſt quod ſupponit præſens analogia.

Ex. gr. Moveatur Corpus primum dextram verſus celeritate partium ſex, & ſecundum in partem contrariam celeritate partium quatuor; ſit etiam Corpus primum corporis ſecundi quadruplum: Erit igitur velocitas reſpectiva accedendi ante occurſum partium decem $6 + 4 = 10$; & Corporum ſumma erit partium 5: Erit ergo ut Summa Corporum $= 5$ ad duplum corporis ſecundi $= 2$. Ita Velocitas reſpectiva integra $=$ 10. ad $\frac{2 \times 10}{5} = 4$: Cujus velocitatis & velocitatis primi ante occurſum differentia $= 2$. dabit velocitatem primi poſt occurſum. Unde celeritas ſecundi poſt occurſum erit partium 12. *Q.E.I.*

Sin corpus alterum quiescat, ejus celeritas post occursum ex analogia priori immediate innotescet. Nempe si corpus majus in exemplo priori immotum ponatur, motus ejus ex hac analogia invenietur immediate. Nam ut Summa Corporum $= 5$. ad duplum corporis secundi $= 2$. Ita velocitas respectiva integra $= 4$. ad velocitatem secundi post occursum $= \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$ sive $1\frac{3}{5}$. Differentia enim inter celeritatem primi ante occursum quippe nullam, & celeritatem hanc, erit ipsa celeritas primi post occursum, & per consequens velocitas secundi erit partium $\frac{12}{5}$ sive $2\frac{2}{5}$.

(21.) Celeritas quam corpus majus perfecte elasticum dat minori quiescenti perfecte elastico, ad eam quam simili velocitate minus imprimit quiescenti majori, eandem habet rationem quam majoris magnitudo ad minoris magnitudinem. Ob datam enim in utroque casu velocitatem respectivam, & datam etiam corporum summam erit calculus in utroque casu similis, *viz.* Ut Summa Corporum data, ad velocitatem respectivam datam; ita duplum corpus majus, vel duplum minus ad velocitatem quæsitam. Sunt ergo velocitates ut corpora. *Q. E. D.*

Scholium. Libet hic loci, corollarii vice, tria reliqua Cl. Hugenii Theoremata huc spectantia attexere, licet eorum demonstratio longior sit quam quæ hoc in loco afferri debeat: Tum quod per se nobilissima sint, tum quod ex calculo juxta problema nuper propositum administrato satis constare possint.

(1.) Duobus corporibus perfecte elasticis sibi mutuo occurrentibus id quod efficitur ducendo singulorum magnitudines in velocitatum suarum quadrata simul additum ante & post occursum corporum æquale invenitur; si videlicet & magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineisve ponantur.

(2.) Si quod corpus perfecte elasticum majori vel minori quiescenti obviam pergat, majorem ei celeritatem

tem dabit per interpoſitum corpus mediæ magnitudinis perfecte elaſticum itidem quieſcens, quam ſi nullo intermedio ipſi impingatur: Maximam vero celeritatem um conferet, quum corpus interpoſitum fuerit medium proportionale inter extrema.

(3.) Quo plura corpora perfecte elaſtica interponentur inter duo inæqualia perfecte elaſtica, quorum alterum quieſcat, alterum moveatur, eo major motus quieſcenti conciliari poterit: Maximus autem per unamquamque interpoſitorum multitudinem ita conferetur, ſi interpoſita cum extremis continuam geometrice proportionalium ſeriem conſtituant.

Notandum autem ex poſtremis duobus per Autoris calculum conſtare, Quod ſi corpora centum ex ordine dentur in proportione dupla, incipiatque motus a maximo, erit *celeritas* minimi ad celeritatem qua movebatur maximum proxime ea quæ 14.760.000.000 ad 1. Si vero a minimo motus incipiat, augebitur in univerſum *motus quantitas* ſecundum rationem proxime quæ 1. ad 4.677.000.000.000. Unde ſane in caſu priore mirandum *velocitatis*, in poſteriore magis mirandum ipſius *quantitatis motus* augmentum conſequitur.

Quæ autem (ut hoc tandem moneam obiter) Cl. Hugenius de omnibus corporibus, aut ſaltem de omnibus perfecte duris aſſeruit, nos tantum de omnibus perfecte elaſticis, cum Cl. Walliſio & Newtono aſſeruimus & demonſtravimus. Neque aliter certe aut intelligi aut affirmari debent. Motuum enim Leges quæ corporibus reliquis non elaſticis congruunt, aliæ plane ſunt plerumque, & ab hiſce ſatis diverſæ; prout ex ante dictis abunde conſtare poteſt: atque adeo cum elaſticorum legibus ſunt minime contaminandæ. Quæ autem corpora imperfecte elaſtica ſpectant, è Cl. Newtono in ſequentibus tradentur. Sed Manum de tabula.

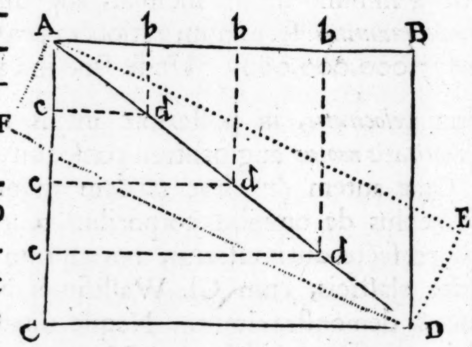
Maij 8. 1704.

VI.

MOTUUM Leges in corporum tum durorum tum elasticorum collisionibus observatas in prioribus absolvimus; restat jam ut reliquas motuum leges Philosophiæ Newtonianæ Præsternendas aggrediamur. Esto itaque,

(22.) Corpus omne viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describet, quo latera separatis.

Si corpus *A*, dato tempore, vi sola *AB*, secundum lineam *AB* impressâ ab *A* ad *B*. Et vi sola *AC*. secundum lineam *AC* impressa, ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque simul impressa corpus eodem dato tempore feretur ab *A* per lineam diagonalem ad *D*. Nam quoniam vires hæ simul impressæ non sunt sibi invicem oppositæ, se mutuo nequaquam tollent, sed motum quendam inter utrumque quasi intermedium generabunt. Etenim cum vis posterior *AC* secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam & æqualem agat, hæc vis nihil mutare debet velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi priore genitam: Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, sive vis posterior imprimatur sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *BD*. Eodem argumento cum vis prior *AB* secundum lineam *AB* ipsi *CD* parallelam & æqualem agat, hæc vis nihil mutare debet velocitatem accedendi ad lineam illam *CD*, a vi posteriore genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore



pore

pore adlineam *CD*, ſive vis prior imprimatur, ſive non; tque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *CD*. Et idcirco Corpus in fine illius temporis in utriuſque lineæ *BD* & *CD* concurſu *D* ut reperitur eſt neceſſe. Porro, cum idem omnino eadem rorſus ratione de punctis innumeris *ddd*, &c. in eadem diagonali linea ſatis demonſtrari poſſit, liquet corpus ex conjunctis hiſce viribus lineam rectam diagonalem ſemper deſcribere debere. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Datis viribus velocitas ex earundem conjunctione orta erit eo major quo directiones virium primarum *conſpirant* magis, ſive, quo angulus *BAC* eſt minor; & eo minor quo directiones iſtarum virium ſibi invicem magis *opponuntur*, ſive, quo angulus *BAC* eſt major: Velocitas autem utriuſque directionis ſecundum lineas parallelas *AC*, *BD* & *AB*, *CD* ad lineas *BD* & *CD* aliaſve quaſcunque eiſdem parallelas accedendi nullo modo ex harum virium conjunctione mutatur, ſed ſemper manet invariata; uti ex propoſitionis hujus demonſtratis patet.

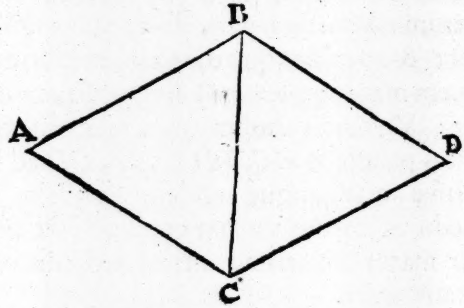
Coroll. (2.) Linea eadem diagonalis *AD* ex binarum virium innumerarum conjunctione deſcribi poteſt. Sic ſi loco vis prioris *AB* ſupponatur alia *AE*, & loco poſterioris *AC* ſupponatur alia *AF*, & perficiatur parallelogrammum *AEDF*, linea *AD* exiſtente communi diagonali, Corpus ex hiſce viribus conjunctis eandem lineam *AD* deſcribet quam prius ex aliis deſcripſerat; uti ex hac propoſitione conſtat: Et par eſt ratio de binis quibuſcunque viribus quibus latera parallelogrammi cujuſcunque cujus *AD* eſt diagonalis deſcribi debuerunt.

Coroll. (3.) Datis itaque tum magnitudine tum directione viribus datur una linea deſcribenda, parallelogrammi nempe diagonalis; ſed data linea deſcripta, ſive diagonali, non illico dantur vires & directiones quibus iſta diagonalis deſcriberetur. Ratio in promptu eſt; quoniam datis parallelogrammi lateribus, & incluſo angulo, datur una ipſum parallelogrammum, atque adeo

paral-

parallelogrammi iſtius diagonalis: Sed data linea longitudine & directione tanquam diagonali, non tamen exinde datur parallelogrammum; cum eadem linea verſus eandem plagam extenſa parallelogrammorum innumerorum diagonalis eſſe poſſit. Ut enim latera parallelogrammi data, ſine dato angulo incluſo, nullam certam diagonalem determinant, ita & diagonalis data ſine angulis hinc inde eidem adjacentibus datis Nulla certa latera determinare poteſt.

Coroll. (4.) Ubi vires primariæ *BA*, *BD* æquantur inter ſe; & angulum *ABD* graduum 120 gr. comprehendunt, velocitas ex conjunctis viribus eadem erit quæ ex alterutra ſeorſim: & virium directiones ſolæ mutabuntur; triangula enim *ABC* & *BCD* in hoc caſu erunt æquilatera, & Rhombum component; & diagonalis proinde *BC* utrivis Rhombi lateri *AB* aut *BD* æqualis erit.



Coroll. (5.) Ubi vires primariæ ſunt æquales, & angulus a lateribus incluſus eſt rectus, velocitas ex viribus conjunctis erit velocitati ex alterutrâ ſeorſim incommenſurabilis; nimirum ut quadrati diagonalis ad ejuſdem latus; ideoque nullis numeris explicanda.

Scholium. Quæ de veris motibus & velocitatibus in hac propoſitione & ejuſdem corollariis dicta ſunt, etiam viribus quibuſcunque ſive ad motum conatibus ſunt applicanda. Sic ſi Corpus *A* in figura priore a duabus viribus eam inter ſe rationem quam lineæ *AC* & *AB* habentibus & ſecundum directiones earundem linearum datas impelleretur, premeretur, attraheretur, aut quoquo modo tenderet, licet propter obſtacula aut alias cauſas motus

revera

revera non ſtatim ſequeretur, impulſus aut vires ex iſtis conjunctis viribus ortæ, ſecundum directionem lineæ diagonalis *AD* tenderent; & velocitas generanda per iſtam lineam *AD* exponi deberet. Ut ex ſequentibus facilius intelligetur.

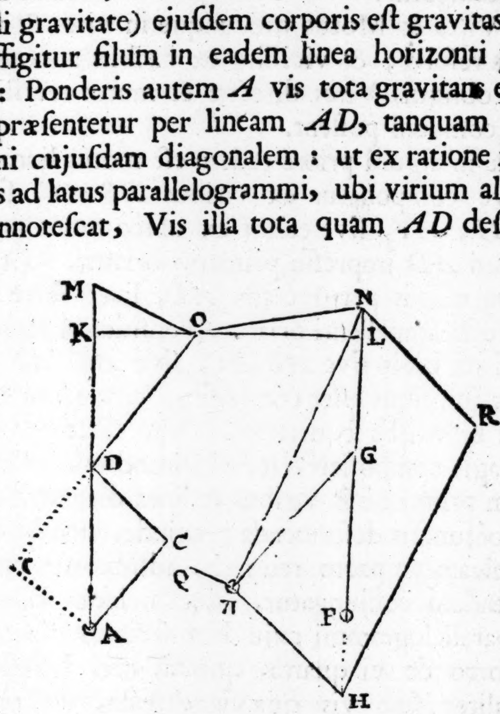
(23.) Vires & Motus quicunque in vires & motus innumeros reſolvi; & viciſſim ex viribus aut motibus quibuſvis obliquis Vires directæ & motus rectilineares innumeri componi poſſent.

Sic ſane in figurâ priore eadem eſt motûs linea & directio ſive componatur ex viribus *AB AC*, ſive ex viribus *AE*, *AF*, ſive etiam ex unico motu per eandem lineam *AD* impreſſo primario oriatur. Et viciſſim motus quivis per rectam *AD*, licet forte ex vi ſimplici recta impellenti oriatur, conſiderari tamen poteſt quaſi ex binis ſive *AB AC*, ſive *AE AF* aliiſve innumeris ſimilibus eſſet compoſita; cum idem omnino motus ex binis iſtis ſequeretur. Nec aliter de motibus adhuc magis compoſitis erit ratiocinandum. Conſideratis enim primo binis viribus & linea diagonali ex iſtis inter ſe conjunctis deſcribenda; deinde, iſtis binis viribus ad unicam eo pacto reductis, adhibeatur vis tertia & cum eadem conjungatur, hinc orietur motus per alteram parallelogrammi cujuſdam ſecundi diagonalem, & ita porro de vi quartâ, quintâ, *&c.* in infinitum. Neque aliter ſane vis quævis directa, ubi opus, in plures reſolvi poteſt. Quæ ſane Virium Compoſitio & Reſolutio adhibetur frequentiſſime, & abunde ex Mechanicâ confirmatur; uti jam cum Newtono oſtendemus.

Si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON*, filis *MA*, *NP*, ſuſtineant pondera in æquilibrio, & quærantur vires ponderum ad rotam movendam; per centrum *O* agatur recta linea *KOL* filis pondera ſuſtinentibus perpendiculariter occurrens in *K* & *L*; centroque *O*, & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* deſcribatur circulus occurrens filo *MA* in *D*; per *O* & *D* agatur recta *OD*, cui ſit perpendicularis *DC*,

&

& eidem parallela *AC*; compleaturque parallelogrammum *DCAc*: Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K*, *L*, *D*. affixa sint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac si suspenderentur a punctis *K* & *L*, vel *D* & *L*; eadem enim (sepositâ ipsius fili gravitate) ejusdem corporis est gravitas, ubicunque affigitur filum in eadem linea horizonti perpendiculari: Ponderis autem *A* vis tota gravitans exponatur vel repræsentetur per lineam *AD*, tanquam parallelogrammi cujusdam diagonalem: ut ex ratione istius diagonalis ad latus parallelogrammi, ubi virium altera nulla est, innotescat, Vis illa tota quam *AD* designat re-



solvi potest in vires binas innumeras, sed cum reliquæ a nostro proposito sint alienæ, resolvatur in binas *Dc* (vel *AC*) & *DC*; alteram nempe secundum directionem radii *DO* protracti, alteram vero eidem radio perpendicularem. Harum virium Altera *AC* vel *cD* trahendo radium *OD* directe a centro, (tendit enim a *D* versus *c* in ipso radio protracto) nihil valet ad movendam rotam; Vis autem altera *DC* trahendo radium *DO* perpendiculariter idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL*, ipsi *OD* æqualem: Cum vero rota ex hypothesi quiescat in æquilibrio, erit Pondus

P, ad

, ad Pondus *A*, ut Vis *DC*, ad Vim *DA*. Tota nim vis ponderis *P* trahit radium *OL* perpendiculariter, & ita integram vim suam confert ad rotam moendam: Sed Ponderis integri *A* per lineam *AD* exositi pars illa tantum quæ per *DC* exponitur trahit raium *OD*, ipsi *OL* æqualem perpendiculariter: alterâ arte secundum radium *cO* tendendo plane deperditâ: ars illa itaque *DC* solummodo confert ad movendam otam. Cum itaque, ob æquilibrium utrinque suppotum, Vis integra ponderis *P* æquivaleat cuidam tanum parti Ponderis *A*, nempe *DC*, liquet tanto majus sse debere Pondus *A* quam pondus *P*, quanto diagoalis *DA* est major quam latus *DC*. idque propter orporis *A* a perpendiculo *DC* declinationem. Est ergo t Pondus *A*, ad Pondus *P*, ita *DA*, ad *DC*: hoc est, b similia triangula *ADC*, *DOK*, ut *OD* vel *OL* ad *K*. Pondera itaque *A* & *P* quæ sunt reciproce ut adii in directum positi *OL* & *OK*, idem utrinque alebunt, & sic in æquilibrio consistent. Atque hæc ne est Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio proprietas otissima & fundamentalis, & ex hac virium resolutione acile demonstratur. Sin Pondus alterutrum sit majus uam in hac ratione, vis ejus fortior prævalebit, & ad ovendam rotam sufficiet. Quod si Pondus π Ponderi æquale partim suspendatur filo *N*π, partim incumat plano obliquo π*G*, agantur *NH*, π*H*, prior horionti, posterior plano π*G* perpendicularis; & compleatr parallelogrammum π*NRH*. Et si vis integra ponris π deorsum tendens exponatur per lineam *NH*, ec resolvi potest in vires π*N*, *RN*. Et si filo π*N* rpendiculare esset planum aliquod π*Q*, secans planum terum π*G* in lineâ ad horizontem parallela, & pondus his planis π*Q* π*G* solummodo incumberet, urgeret ud hæc plana π*Q*, π*G* perpendiculariter, nimirum anum π*Q* vi π*N*, & planum π*G* vi *RN*: Ideoque tollatur planum π*Q* ut pondus tendat filum, quoiam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sub-

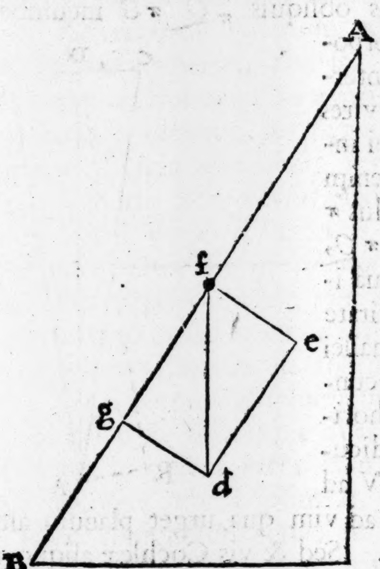
ſublati, tendetur illud eadem vi πN quâ planum antea urgebatur: Unde tenſio fili hujus obliqui, erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis PN, ut πN, ad NH: Ideoque ſi pondus π augeatur in ratione NH ad $N\pi$ ſuſtinebit pondus A, & rota non movebitur. Unde ſi pondus π, ſit ad pondus A, in ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum AM PN a centro rotæ, ſeu ut KO ad OL, & etiam in ratione directa NH ad πN, hoc eſt, rationes utraſque ſimul conjungendo, ut rectangulum KO in NH ad rectangulum OL in πN, pondera æqualiter valebunt ad rotam movendam; atque adeo ſe mutuo ſuſtinebunt in æquilibrio; ut quilibet facillime experiri poteſt.

Coroll. (1.) Hinc via nova aperitur omnia pondera minora ex unico dato pondere menſurandi. Si enim planum πG perfecte politum ad varios inclinationis gradus gradatim collocetur, idem pondus π vel P diverſis quibuſcunque ponderibus ſe minoribus æquivalebit; in ratione nimirum lineæ πN ad HN. Atque adeo ſi tabella conficiatur rationes linearum πN & HN ad quoſcunque inclinationum gradus exhibitura, facile fuerit ex inclinatione plani πG & unico dato pondere π vel P omnium corporum corpore π vel P minorum ut A pondera examini ſubjicere & determinare.

Coroll. (2.) Hinc etiam corporum in planis quibuſcunque inclinatis deſcendentium vel reclinantium velocitates vel pondera licet æſtimare: Sit AB planum inclinatum, & f corpus per illud planum deſcendens, vel in illud recumbens; exponatur vis gravitatis integra per lineam df horizonti perpendicularem, & reſolvatur illa vis integra in binas vires fe & fg, quarum altera fe ſit plano inclinato perpendicularis, cui itaque ferendo iſtud planum adæquate ſufficit; altera fg ſecundum planum inclinatum parallelos poſita, quæ itaque motui ciendo, vel ad motum ſaltem conatui vel ponderi procurando ſine impedimento impenditur: Eſt ergo motus vel pondus in plano inclinato, ad motum vel pondus

in

n plano ad horizontem perpendiculari, ut latus *fg* ad ineam diagonalem *fd*: hoc eſt, ob triangula ſimilia *gd* & *ABC*, ut *AC* ad *AB*, ſive ut anguli *BAC*

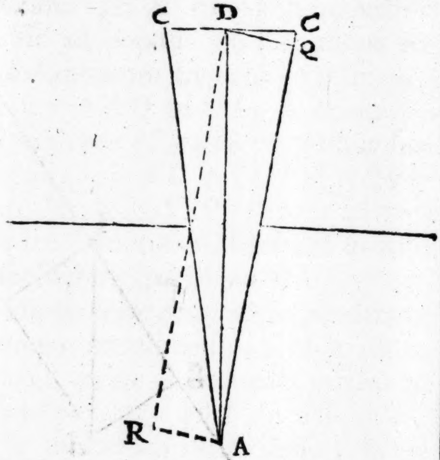


adius ad ſecantem; quæ eſt propoſitio in Mechanicis otiſſima.

Coroll. (3.) Hinc etiam vis cunei innoteſcit. Sit *CCA* cuneus, a malleo ictu directo impulſus: exponatur vis integra ictûs per lineam *DA*; & reſolatur illa in binas vires *DQ* & *DR*; quarum ltera *DQ* ſit ligni findendi faciei *CA* perpendicularis, atque adeo ad eandem faciem amoliendam irecte diſpoſita; altera verò *DR* ſit eidem faciei arallela, atque adeo ad directe progrediendum diſpoita; & idem de altero Cunei dimidio *DAC* intelligaur: erit itaque amolitio obicis ſecundum lineam *DQ*, d progreſſum virium deorſum ſecundum lineam *DR*, t *DQ* ad *DR*; hoc eſt, ob ſimilia triangula *DQA* *DCA*, ur *DC* ad *DA*; ſive, computatis etiam alterius artis viribus, ut *CC* ad *DA*; quæ eſt etiam notiſſima

cunei

cunei proprietas: & in mechanicis receptissima. Vel etiam, Si hanc rem cum Newtono absolvere placuerit ex prius domonstratis, Habebit in figura penultima pondus π planis duobus obliquis πQ πG incumbens rationem Cunei inter corporis fissi facies internas, & inde vires cunei & mallei innotescent; etenim vis quâ pondus π urget planum πQ, est ad vim quâ idem, vel gravitate sua, vel ictu mallei impellitur secundum lineam horizonti perpendicularem, ut πN ad NH; atque ad vim qua urget planum alterum πG ut πN ad NR. Sed & vis Cochleæ aliquo modo per similem virium divisionem colligi potest, quippe quæ, ex sententia Newtoni, cuneus est a vecte impulsus.



Scholium. Usus itaque hujusmodi motus compositionis & resolutionis latissime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota, ab Authoribus diversimode demonstrata; ex hisce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, Vectibus, radiis volubilibus, nervis tensis, & ponderibus directe vel oblique ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent; ut & vires Musculorum ad animalium ossa movenda.

Octob. 23. 1704.

(24.) QUA-

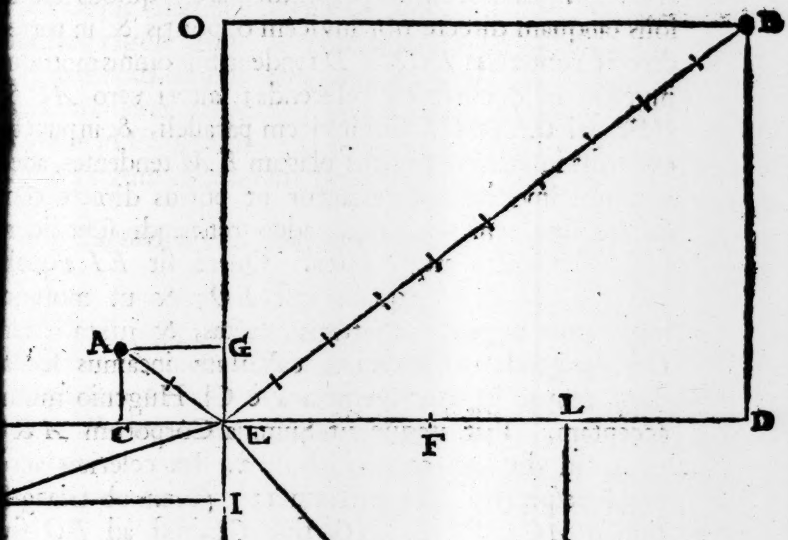
VII.

4.) QUANTITAS motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eanm partem, & differentiam factorum ad contrarias n mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt, per otus Legem quintam; adeoque, per Legem quartam, quales in motibus efficiunt mutationes versus contras partes: Ergo si motus fiunt versus eandem partem, icquid additur motui corporis fugientis subducetur motu corporis insequentis, sic ut *summa* maneat eam quæ prius. Sin corpora obviam eant in eadem lia, æqualis erit subductio de motu utriusque, adeoe *differentia* motuum factorum in contrarias partes anebit eadem. Ut si corpus *A* sphæricum sit triplo ajus corpore sphærico *B*, habeatque duas velocitatis rtes; & *B* sequatur in eadem recta cum velocitatis rtibus decem; adeoque motus ipsius *A*, ex velocie & magnitudine conjunctim ortus, sit ad motum ius *B* eodem modo æstimatum, ut senarius numerus denarium: motuum ergo summa in eandem plagam partium sedecim. In Corporum itaque *A* & *B* ncursu si corpus *A*, pro varia Elaterii quantitate, lutur motus partes tres, vel quatuor, vel quinque, corpus amittet partes totidem; adeoque perget corpus *A* t reflexionem cum partibus novem, vel decem, vel lecim, & *B* cum partibus septem, vel sex, vel quinque; stente semper summâ partium sedecim ut prius; uti orporibus aut non omnino, aut saltem minori gradu ticis semper eveniet. Sin corpus *A* lucretur partes em, vel decem, vel undecim, vel duodecim, adeoe progrediatur post occursum cum partibus quinde, vel sedecim, vel septendecim, vel octodecim, rpus *B* amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel gredietur cum una parte, amissis partibus novem; vel escet amisso motu suo progressivo partium decem; vel re-

regredietur cum una parte amiſſo motu ſuo, & (ut ita di-cam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus dua-bus, ob detractum motum progreſſivum partium duode-cim; *&c.* Atque ita ſummæ motuum conſpirantium 15 + 1, vel 16 + 0, atque etiam differentiæ contrariorum 17 — 1 vel 18 — 2, ſemper erit partium ſedecim, ut ante concurſum & reflexionem. Quod in corporibus perfecte elaſticis eveniet; uti ex legibus motus de iiſdem prius expoſitis, & ex infra dicendis de imperfecte ela-ſticis ſatis intelligi poterit. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenie-tur cujuſque velocitas poſt eandem reflexionem, po-nendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut mo-tus poſt, ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi cor-poris *A* motus erat partium ſex ante reflexionem, & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem, invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, juxta regulam auream; ut motus partes ſex ante reflexionem, ad motus partes octo-decim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexio-nem, ad velocitatis partes ſex poſtea. Cum enim mo-tus quantitas oriatur ex velocitate & magnitudine con-junctim, in dato corpore motus quantitas ex velocitate ſola æſtimabitur, atque adeo quantitas motus & veloci-tatis erunt ſibi invicem directe proportionales. Quod ſi corpora non ſphærica, vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum mo-tus poſt reflexionem, cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus; dein corporis utriuſque motus diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem par-allelum; motus autem paralleli, propterea quod nullo modo ſibi adverſantur, corporibus in ſe invicem ſecun-dum lineam huic plano perpendicularem agentibus, re-tinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt, ſic ut ſumma conſpirantium

& differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Exempli gratia, sit corpus sphæricum *A* & perfecte elasticum triplo majus corpore sphærico *B* perfecte etiam elastico, habeatque *A* duas velocitatis partes, per lineam *Ac* in duas æquales partes bisectam expositas, Corpus *B*



oblique occurrat secundum rectam *BE* in angulo *AEB* cum velocitatis partibus decem, per lineam *BE* in decem partes inter se & cum prioribus æquales sectam expositis; bisecetur angulus *AEB* a recta *OEM*: Demittantur *AG* & *BO* ad lineam *EO* perpendiculares; & perficiantur parallelogramma *ACEG BOED*. Erit

 ita-

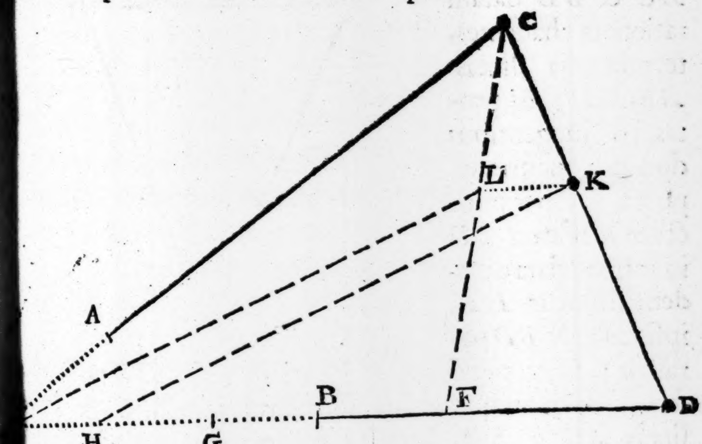
itaque planum per *OM* illud a quo corpora ſphærica *A* & *B* in puncto concurſus tangentur; & motus obliqui per diagonales *AE* & *BE* utrinque in binos diſtinguentur, *AE* nimirum in *AG* & *AC*, & *BE* in *BO* & *BD*, quorum motuum alteri *AG* & *BO* vel *CE* & *ED* ſunt plano occurſus perpendiculares, quibus itaque ſolis tanquam directe ſibi invicem oppoſitis & in partes directe contrarias *EC* & *ED* tendentibus omnis motuum mutatio in occurſu eſt referenda; alteri vero *AC* & *BD*, vel *GE* & *OE* ſibi invicem paralleli, & in puncto occurſus in eandem penitus plagam *EM* tendentes, adeo non ſibi invicem contrariantur ut potius directe conſpirare ſint cenſendi, atque adeo retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea. Quare ſit *EI* æqualis ipſi *EG*, & *EM* æqualis ipſi *EO*; & ut motuum mutationes in partes contrarias factas, & juxta lineam *CD* dirigendas æſtimemus, calculum ineamus ſecundum motus legem vigeſimam, è Cl. Hugenio mutuo acceptam. Fiat itaque ut Summa Corporum *A* & *B* $= 4$, ad duplum corporis $B = 2$. Ita celeritas accedendi reſpectiva *CD* partium 12: (Nam ob triangula ſimilia *AGE BOE*, *AG* ſive *CE*, eſt ad *BO* ſive *ED*, ut $AE = 2$, ad $EB = 10$; atque adeo $AE + EB = 12$) ad dimidium ipſius $CD = CF = 6$. Et differentia inter hanc celeritatem partium 6, & celeritatem corporis *A* ante impulſum partium 2, $= 4$, exhibebit celeritatem qua corpus *A* poſt occurſum movebitur: qua celeritate ex integra celeritate reſpectiva ante occurſum ablata, $12 - 4 = 8$, reſtat corporis *B* poſt eundem occurſum celeritas. Sit ergo *EN* partium 4, & *EL* partium 8, & perfectis parallelogrammis *ENHI* & *ELKM*, ductiſque diagonalibus *EH* & *EK* corpora *A* & *B* eodem tempore quo ad occurſum per diagonales *AE* & *BE* prius properabant, poſt occurſum ad puncta *H* & *K* per diagonales *EH* & *EK* regrediendo pervenient; & erit motus corporis $A = 4 \times 3, = 12$ partium; & motus corporis $B = 8 \times 1, = 8$

= 8 partium, quorum motuum differentia est partium quatuor, quæ etiam erat motuum ante occursum differentia. Quapropter in hoc casu quantitas motus quæ colligitur capiendo differentiam motuum factorum ad partes contrarias non mutatur ab actione corporum inter se: atque adeo in corporibus oblique impingentibus valet hæc regula æque ac in iis quæ directe impingunt. Ex hujusmodi autem reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria: Sed hos casus in sequentibus non opus est ut consideremus: & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

Lemma ad Legem motus 25^m.

SI rectæ duæ positione datæ *AC*, *BD* ad data puncta *A* & *B* terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta *CD* qua puncta indeterminata *C*. *D*. junguntur secetur in ratione data in *K*, dico quod punctum *K* locabitur in recta positione data.

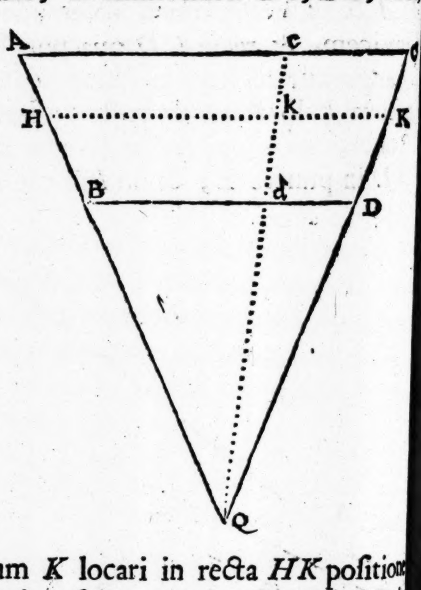
Concurrant enim rectæ (si non sint parallelæ) *AC* & *BD* in puncto *E*; & in *BE* capiatur *BG*, ad *AE*,



est *BD*, ad *AC*: Sitque *FD* æqualis *EG*. Et erit *EC*, ad *GD*, hoc est, ad *EF*, ipsi *GD* ex hypothesi æqualem, ut *AC*, ad *BD*, adeoque in ratione data; &

 pro-

propterea dabitur specie triangulum *EFC*, (ex datis nimirum angulo *CEF*, & laterum *EC*, *EF* circa eundem angulum ratione.) Secetur *CF* in *L* in ratione illa data, & dabitur etiam specie triangulum *EFL* (ob datam laterum circa datum angulum *EFC* rationem) & proinde punctum *L* locabitur semper in recta *EL* positione data. Junge *LK*; & ob datam *FD*, utpote ipsi *EG* datæ æqualem; & datam rationem *LK* ad *FD*, eam nempe *CK* ad *CD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*; & erit *ELKH* parallelogrammum. Est enim *LK* ipsi *FD* parallela, & perconsequens ipsi *EH* ejusdem lineæ protractæ parti parallela, & ex hypothesi æqualis: Locatur ergo punctum *K* in parallelogrammi latere positione dato *HK*. *Q.E.D.* Sin rectæ *AC*, *BD* sint inter se parallelæ, punctum concursus erit infinite distans, hoc est nullum; & omnes lineæ *EC*, *EL*, *HK*, *ED* erunt inter se parallelæ. Quo in casu hoc Lemma ita demonstramus. Junguntur puncta, lineas *AC* & *BD* datam rationem habentes, terminantia lineis *AB*, *CD*; & protractis jungentibus donec concurrant, puta in *Q*, per punctum *K* lineam *CD* in ratione data dividens ducatur *HK*, ipsis *AC* & *BD* parallela: Dico punctum *K* locari in recta *HK* positione data. Ubicunque enim sumuntur puncta *C* & *D* in lineis *AC* & *BD*, linea eadem puncta conjungens ad idem punctum *Q* tendet, ut in punctis *c* & *d*, & linea jungens *cd* in data illa ratione secabitur a linea *HK*: Est enim ex hypothesi & in hac figura *Ac* ad *Bd* ut *AC* ad



BD:

BD: Est etiam ex hac hypothesi & in hac figura *ck* ad *cd* ut *CK* ad *CD*: Unde liquet & in hoc casu punctum *K* semper locari in recta positione data. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens locabitur in recta positione data; & punctum illud, ut *K*, movebitur uniformiter in ista linea recta. Nam ob celeritatem utriusque puncti uniformem & æquabilem Lineæ motus ut *AC* & *BD* quas simul describunt erunt semper in ratione data, nimirum in ratione celeritatum utrinque æquabilium: Unde liquet è jam demonstratis punctum *K* in linea recta *HK* semper ferri. Quod vero uniformiter & æquabili motu feratur, hoc modo demonstrabitur: *HK* semper est æqualis *EL*, & *EL* eadem ratione crescit ac crescunt ipsi proportionales *EC* & *EF* lineæ, quæ iis *AC* & *BD* per quas corpora simul moventur sunt ex prius dictis etiam proportionales. Est itaque *EC*, ad *EF*, ut *AC*, ad *BD*; unde cum istæ lineæ ex motus æquabilitate crescunt uniformiter, etiam *EL* & ei æqualis *HK* iisdem proportionalis uniformiter etiam crescet; sive, quod perinde est, punctum *K* motu æquabili & uniformi per lineam *HK* feretur. *Q. E. D.* Et pariter in casu secundo ubi lineæ motus parallelæ ponebantur. Nec opus est ut in re facillima verba addamus. In loco etiam solido simili fere demonstratione Lemmatis veritas colligetur, demittendo nimirum ad planum termedium per punctum quodvis *K*, & alterum in eadem ratione minimam linearum distantiam secans & eidem distantiæ normale perpendiculares, & vice linearum motus in diversis planis positarum adhibendo, lineas, perpendiculares dimissas jungentes, & in eodem plano positas, ut demonstratio in hac propositione adhibita isti casui applicari possit.

Coroll. (2.) Si puncta utraque in eandem partem progrediantur, etiam & punctum dividens in eandem partem progredietur: Si punctorum alterum in hanc, alterum

terum vero in contrariam partem moveatur, punctum dividens aut in hanc aut in contrariam partem tardius movebitur; prout celeritatis majoris, aut a puncto *K* distantiæ rationes postulaverint. Vel demum, si rationes istæ sint æqualitatis, & in neutram partem prævaleant, punctum dividens in neutram partem movebitur, sed omnino quiescet. Unde in omni casu punctum istud dividens *K* aut quiescet, aut movebitur uniformiter in linea recta.

(25.) Commune centrum gravitatis systematis corporum ab actionibus corporum inter se, (sive attractiones sint, sive impulsus) non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis aut externis, aut aliunde arcessitis) Commune centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Nam si duo corpora vel puncta ut *C. D.* progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis *AC. BD*, & eorum distantia *CD* dividatur in ratione data; (uti linea per corporum motorum centra gravitatis semper transiens a communi utriusque gravitatis centro *K*, in ratione data, nimirum corporibus reciproca, dividitur) commune illud gravitatis centrum *K* aut quiescet, aut movebitur uniformiter in linea recta *KH*. Ergo si corpora quotcunque moveantur uniformiter in lineis rectis, commune centrum duorum quorumvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens dividitur ab hoc communi duorum gravitatis centro in ratione data. Similiter & commune centrum gravitatis horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia gtavitatis centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione, corpori nempe & systemati duorum corporum reciproca: Nam commune gravitatis centrum duorum in recta uniformiter progreditur, atque adeo

Vid. Fig. p. 69. & *Fig. p.* 70.

pari

pari ratione ac centrum cujufvis corporis eft habendum. Eodem modo commune centrum gravitatis horum trium & quarti cujufvis vel quiefcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diftantia inter centrum gravitatis commune trium, & centrum gravitatis quarti in data ratione, corpori nempe & fyftemati trium corporum reciproca: & fic porro in infinitum. Igitur in fyftemate corporum, quæ actionibus in fe invicem aliifque omnibus in fe extrinfecus impreffis omnino vacant, adeoque vel quiefcunt, vel moventur fingula uniformiter in rectis fingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiefcit, vel movetur uniformiter in directum. Porro in fyftemate duorum corporum in fe invicem agentium, cum diftantiæ centrorum utriufque a communi amborum gravitatis centro fint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem five ex attractione, feu vi centripeta; five impulfu, feu vi centrifuga accedendi ad centrum illud vel ab eodem centro recedendi æquales inter fe, & velocitas acceffus vel receffus corporibus reciproce proportionales; hoc eft diftantiis a centro gravitatis amborum directe proportionales. Unde ex iftis actionibus augebitur vel minuetur diftantia ab illo centro proportionaliter: Proindeque centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter fe, five fe mutuo trahant five fugent, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in ftatu fuo quoad motum vel quietem. In fyftemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in fe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ftatum fuum, & reliquorum, quibufcum actio illa intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur, diftantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes, fummis totalibus corporum quorum funt centra gravitatis, reciproce proportionales; adeoque centris illis duobus

bus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus; commune omnium centrum gravitatis ſervat etiam ſtatum ſuum; manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem omnium ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe vel inter bina ſunt corpora, ubi nihil ſtatus centri gravitatis ſyſtematis mutatur; uti jam vidimus; vel ab actionibus inter bina compoſitæ, & propterea communi omnium gravitatis centro mutationem in ſtatu motus ſui vel quietis nunquam inducent. Nam ſi ab Actione *A* in *B* ſtatus centri gravitatis nihil perturbetur, & ab actione *C* in *B* nihil perturbetur; neque ſane a conjunctis *A* & *C* actionibus in *B* ſtatus ille centri gravitatis perturbabitur. Quare cum centrum illud commune gravitatis ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem quæ corporis ſolitarii quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii, ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

Octob. 30. 1704.

VIII.

(26.) CORPORUM dato ſpatio incluſorum, & proinde motum ipſius participantium iidem ſunt motus inter ſe ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum, abſque motu circulari.

Nam

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi,) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus, quibus corpora se mutuo feriunt. [ex summis nimirum in corporum ad partes contrarias tendentium, & ex differentiis in corporum ad easdem partes tendentium occursibus.] Ergo per Legem 4. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu, & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Communis enim spatii corporumque inclusorum & uniformis motus in eandem plagam tendens, aut omnia æqualiter accelerando, ut in iis quæ in eandem cum spatio partem tendunt; aut quantum uni detrahit, addendo alteri, ut in iis quæ in partes contrarias tendunt, nullatenus mutabit occursuum vires. Idem comprobatur experimento luculento; motus enim omnes eodem modo se habent in navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

(27.) Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantut, pergent omnia eodem modo moveri inter se ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter, pro quantitatibus movendorum corporum, & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter quoad velocitatem movebunt; adeoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

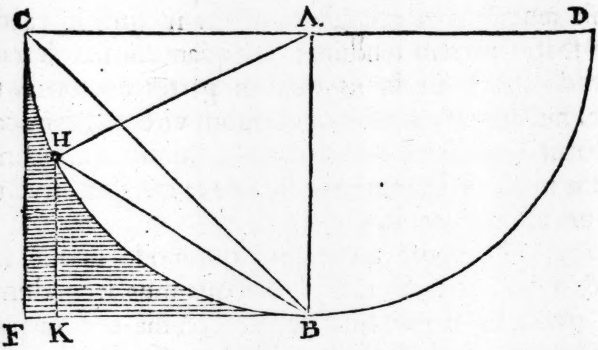
Lemma ad Experimenta proxime memoranda.

Velocitas corporis penduli in puncto circuli descripti infimo est semper ut Chorda arcus quæ cadendo descripsit.

Esto angulus *CAB* rectus, *C* vel *H* mobile filo eodem *CA* vel *HA* a centro *A* suspensum, & per arcum *CB* vel *HB* descensurum; Dico quod velocitas Corporis *C* in puncto infimo *B*, est ad velocitatem corporis *H* in eodem puncto, sive potius velocitas ejusdem corporis primo per arcum *CB* & deinde per arcum *HB* cadentis

cadentis, ut chorda CB, ad chordam HB. Eſt enim, ut mox demonſtrabimus, velocitas * corporis per arcum CB decidentis, in puncto infimo B, (qua nimirum corpus pergeret moveri ſecundum lineam rectam circulum in B tangentem, ſi in B filum relinqueret,) eadem atque ea quam haberet in puncto F, ſi perpendiculariter per CF decidiſſet. Et eadem ratione eſt velocitas corporis per arcum HB deſcendentis eadem atque ea quam haberet in puncto K ſi perpendiculariter per HK decidiſſet: [eadem nemper celeritate per ſpatia in-

* *Per Coroll. 5. Prop. 6. infra.*



ter parallela plana impreſſa, ſive tranſitus per eadem plana ſit perpendicularis, ut in corporibus cadentibus per lineas rectas horizonti perpendiculares; ſive ſit obliquus, ut in corporibus pendulis arcus circulares deſcribentibus, uti inferius patebit plenius.] Eſt itaque Velocitas Corporis per arcum CB deſcendentis, ad velocitatem corporis per arcum HB deſcendentis, ut Velocitas corporis per CF decidentis, ad velocitatem corporis per HK decidentis. Sed eſt † velocitas corporis per CF decidentis, ad velocitatem corporis per HK decidentis, in ſubduplicata ratione lineæ CF ad lineam HK, uti infra demonſtrabitur: & eſt quoque * Chorda CB, ad Chordam

† *Per Coroll. Prop. 4. infra.*

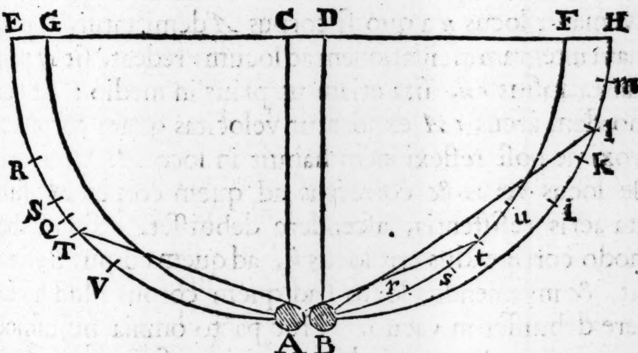
* *Per Prop. 2. infra.*

am *HB*, in eadem ſubduplicata ratione lineæ *CF*, ad neam *HK*; uti infra quoque demonſtrabitur. Unde quitur, Velocitatem Corporis per arcum *CB* deſcenentis, ad velocitatem corporis per arcum *HB*, deendentis, in puncto infimo *B*, eſſe ut eſt Chorda arus *CB*, ad Chordam arcus *HB*. *Q. E. D.*

Corollarium. Hinc corrigendus eſt Cl. Hugenii, ſeu otius Editorum error, rationem veocitatis in puncto infimo *B* eandem ſſe ac ipſarum linearum *CF* & *HK* ipponentium; cum ſit in earundem tantum ratione ſubuplicata; uti jamjam ex ipſius Hugenii principiis deonſtravimus.

De *Vi Centrifuga.* P. 426, 427.

Scholium Generale. Veritas harum legum olim comrobata fuit a Dno. Chriſtophero Wrenno per experimenum pendulorum, coram Societate Regali; quod etiam Cl. Mariottus libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum ut hoc experimentorum genus cum Theoriis ad muſſim congruat, habenda eſt ratio non tantum vis elaticæ corporum pendulorum, ſed etiam & reſiſtentiæ eris. Pendeant corpora *A* & *B* filis parallelis *AC* &



BD a centris *C* & *D*: His centris & intervallis æqualibus deſcribantur ſemicirculi *EAF GBH*, radiis *CA* & *DB* reſpective biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & ſubducto corpore *B* demit-

demittatur inde, redeatque post unam oscillationem integram [ex itu & reditu compositam] ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, & sit *RQ* æqualis ipsi *QV*, & *ST* exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Nam si in duplici tum ascensu tum descensu retardatio sit *RV*, erit retardatio in descensu uno vel uno ascensu ejus pars quarta; & cum arcus bini sint majores & bini minores quam arcus *QA*, resistentia aeris neque in arcubus maximis, neque in minimis sumenda est, sed in mediocri. Unde pars quarta *ST* neque ad punctum supremum *R*, neque ad infimum *V*, sed in medio inter utrumque est collocanda. Restituatur jam corpus *B* in locum suum: Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* absque errore sensibili, tanta erit ac si in vacuo de loco *T* cecidisset; corpore *A* altius paulo cadendo aeris resistentiam compensante: Exponatur itaque juxta Lemma jam demonstratum hæc corporis in puncto *A* velocitas per chordam arcus *TA*. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*, sive elastica sint corpora, sive non. Tollatur corpus *B*, & inveniatur locus *u* a quo si corpus *A* demittatur, & post unam integram oscillationem ad locum *r* redeat, sit *st* pars quarta ipsius *ru*, sita etiam ut prius in medio: Et per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*: nam *t* erit ille locus verus & correctus ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l* ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto omnia hujusmodi experimenta licet perinde experiri ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam *tA*, ut habeatur motus ejus in loco

A proxime

A proxime post reflexionem; & sic corpus B ducendum erit in chordam Bl, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem, & simili methodo ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante quam post reflexionem, & tum demum conferendi sunt motus inter se, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, duodecim, vel sedecim, concurrerent, reperit semper Cl. Newtonus, sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora directe sibi mutuo occurrebant, quod in partes contrarias mutatio motus erat æqualiter corpori utrique illata, atque adeo quod actio & reactio, juxta legem 5^m. semper erant æquales. Ut si corpus A incideret in Corpus B quiescens cum novem partibus motus, & amissis inter collidendum septem partibus, pergeret post reflexionem cum duabus; Corpus B resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam irent, A cum duodecim partibus, & B cum sex, & rediret A cum duabus, redibat B cum octo; facta nimirum subductione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim, & restabit nihil; subducantur aliæ duæ partes, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. Et sic de motu corporis B partium sex, subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora irent ad eandem plagam, A velocius cum partibus quatuordecim, & B tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergeret A cum quinque partibus, pergebat B cum quatuordecim, facta translatione partium novem de corpore A in corpus B; & sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex summa motuum conspirantium, & differentia contrariorum colligebatur. Namque error digiti unius & alterius in mensuris difficultati singula satis accurate

curate peragendi eſt omnino tribuendus. Difficile erat tum pendula ſimul dimittere, ſic ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco ipſo infimo *AB*; tum loca *ſ* & *k* notare ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum; ſed in ipſis pilis, quibus utendum erat, inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis errores aliquales ut inducerent erat neceſſe. Porro nequis objiciat regulam ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla forte reperiuntur in compoſitionibus naturalibus, addimus quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris vel elaſticis, nimirum a conditione duritiei vel elaterii neutiquam pendentia. Nam ſi conditio illa in corporibus non perfecte duris vel elaſticis tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis elaſticæ diminutæ. In Theoria Wrenni & Hugenii corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus relativa: Sed cum Cl. Walliſio omnino dicendum hoc in perfecte elaſticis tantum obtinere; & alias prorſus in corporibus non elaſticis, ſive mollibus, ſive duris, quam in elaſticis leges valere aſſerendum; prout ex olim expoſitis eſt abunde manifeſtum. Speciatim vero corpora illa ſolum quæ ſunt perfecte elaſtica poſt colliſiones mutuas redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus, ſecundum motus Legem 16^m^. eodem ſpectantem, prout in prioribus expoſuimus. In imperfecte elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſtica, & in ejuſdem diminutæ ratione, propterea quod vis illa elaſtica (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur) videtur eſſe in ſe certa & determinata, faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ ſit ad velocitatem relativam concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavit Newtonus: Primum demittendo

pendula

endula & menſurando reflexionem invenit quantitatem is elaſticæ; deinde per hanc vim calculo determinait reflexiones in aliis concurſuum caſibus expectandas, respondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab nvicem cum velocitate relativa quæ eſſet ad velocitaem relativam concurſus ut numerus quinarius ad noenarium. Pilæ ex chalybe fere erant perfecte elaſticæ, edibant enim propemodum cum velocitate concurſus; aiæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proortio erat ut quindecim ad ſedecim circiter. Atque oc pacto Lex quinta quoad ictus & reflexiones per Theoriam Walliſianam comprobata eſt: quæ cum exerientia plane congruit. In attractionibus etiam obtiere hanc regulam, quod ſcilicet quantitas motus quæ olligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eanem partem, & differentiam factorum ad contrarias non utatur ab actione corporum inter ſe, breviter hoc in co oſtendebat Newtonus, cujus in hac cauſa ratiocium olim ſub Lege quinta expendimus; atque adeo em impræſentiarum miſſum faciemus, & ad reliqua c loci à Newtono obſervata accedemus. Ut itaque rpora in concurſu & reflexione idem pollent quorum locitates ſunt reciproce ut vires inſitæ, ſive ipſa corra, uti ex Lege 8ª. & 17ª. & Hugenii Propoſitione intelligi poteſt, ſic in movendis inſtrumentis meanicis agentia idem pollent, & conatibus contrariis mutuo ſuſtinent, quorum velocitates, ſecundum derminationem virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires: pondera æquipollent ad movenda brachia libræ quæ illante libra ſunt reciproce ut eorum velocitates ſum & deorſum; hoc eſt, pondera ſi recta aſcennt & deſcendunt æquipollent ſibi invicem quæ t reciproce ut punctorum à quibus ſuſpenduntur tantiæ ab axe libræ. Sin planis obliquis aliiſve adtis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt obue, pondera æquipollent quæ ſunt ut aſcenſus & denſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum, idque

adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens, ut velocitas aſcenſus perpendicularis, ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus in æquilibrio. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis cochleæ ad premendum corpus, eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus cuneus urget partes duas ligni fiſſi, eſt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo ſecundum lineas faciebus cunei pependiculares: & par eſt ratio machinarum omnium. Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit ut diminuendo velocitatem, augeamus vim, & contra. Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema illud decantatum, *Datum pondus data vi quacunque movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi data quantulacunque ſuperandi. Nam ſi machinæ ita formentur ut velocitates agentis & reſiſtentis ſint reciproce ut vires, Agens reſiſtentiam ſuſtinebit, & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet: Certe ſi tanta ſit velocitatum diſparitas ut vincatur etiam reſiſtentia omnis quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione, & elevandorum ponderibus oriri ſolet, ſuperata omni ea reſiſtentia vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Cæterum mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti: Hisce autem ſaltem oſtendimus quam late pateat, quamque

cer-

rta ſit lex motus quinta prius expoſita. Nam ſi æſti-
etur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjun-
im, & reſiſtentis reactio ex ejus partium ſingularum
locitatibus & viribus reſiſtendi, ab earum attritione,
hæſione, pondere, & acceleratione oriundis, erunt
tio & reactio in omni inſtrumentorum uſu ſibi invi-
m ſemper æquales; & quatenus actio propagatur per
ſtrumentum, & ultimo imprimitur in corpus omne
ſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi re-
tionis ſemper erit contraria.

Corollarium. Ex veris hiſce motuum legibus jam
tis illuſtratis & probatis, apparent plus ſatis craſſi
artesii de iiſdem errores. Cujus leges motuum tan-
m abeſt quod cum veris legibus ubique congruant, ut
otius è contra ab iiſdem ubique fere diſcrepare depre-
endantur. Nec mirum proinde, ſi in reliquis naturæ
hænomenis pariter hallucinatus fuerit. Expoſitis jam
otuum Legibus, ad Propoſitiones eſt deveniendum.

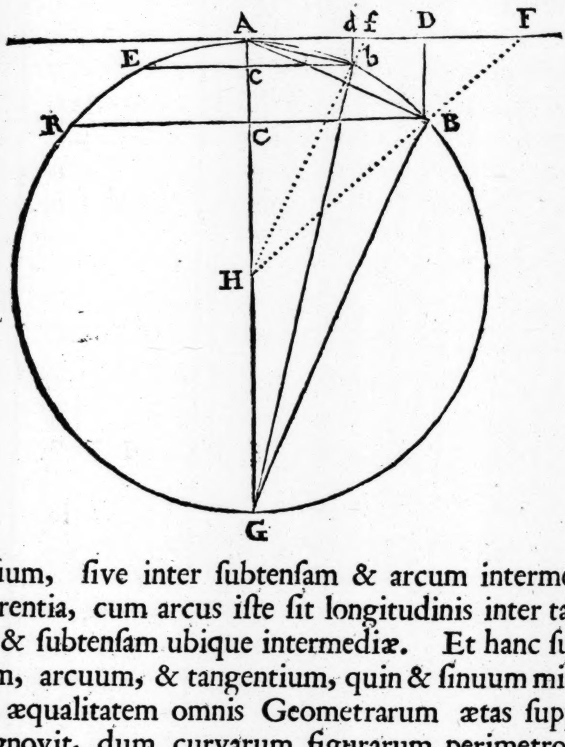
Novemb. 6. 1704.

IX.

PROPOSITIONES.

. RATIO ultima tangentis & ſubtenſæ ſeu chordæ ad arcum curvilineum eiſdem competentem, bi arcus quam minimus vel evaneſcens accipitur, eſt in atione æqualitatis; hoc eſt tangens, arcus, & chorda n unam & eandem lineam deſinunt ſive coaleſcunt. Et idem de ſinu eſt intelligendum. In figura præſente ſit *Ab* arcus circuli vel alterius curvæ quam minimus; it *Af* tangens ejus, & *Ab* ſubtenſa; ſcire itaque ve-im, quænam ſit harum linearum ad invicem ratio, ſi ad punctum *A* quam proxime ſumantur, ſive ubi punctum cum puncto *A* quaſi coaleſcit: & dico, quod arcus

ratio ſive ad tangentem ſupra, ſive ad ſubtenſam infra ſit ratio æqualitatis. Etenim ex natura curvarum liquet omnem inter tangentem & ſubtenſam arcus cujuſvis differentiam a longitudine arcus intermedii oriri, & eo ſemper majorem eſſe differentiam, quo arcus major accipitur, eo minorem quo arcus minor accipitur; unde ſequitur quod in arcu quam minimo erit quam minima differentia, & in arcu infinite parvo, qualem nunc volumus, erit differentia infinite parva, ſive nulla. Et ſi differentia inter tangentem & ſubtenſam ſit nulla, multo magis nulla erit inter tangentem & arcum inter-



medium, ſive inter ſubtenſam & arcum intermedium differentia, cum arcus iſte ſit longitudinis inter tangentem & ſubtenſam ubique intermediæ. Et hanc ſubtenſarum, arcuum, & tangentium, quin & ſinuum minimorum æqualitatem omnis Geometrarum ætas ſuppoſuit & agnovit, dum curvarum figurarum perimetros tanquam polygonorum latera innumera, ubi inſcriptæ & circumſcriptæ figuræ, evaneſcente differentia, coaleſcerent, conſiderarunt.

Corol-

Corollarium. Si itaque demonſtratum fuerit angulorum contactus ſubtenſas *db DB* eſſe inter ſe ſemper in ratione ſubtenſarum *Ab AB* duplicata, uti ſtatim demonſtrabitur, exinde quoque ſequetur eaſdem ſubtenſas evaneſcentes eſſe etiam in ipſorum arcuum conterminorum *Ab AB* vel ſinuum *cb CB* ratione duplicata, quoniam ſubtenſa *Ab* cum arcu *Ab* vel ejuſdem ſinu *cb*, & ſubtenſa *AB* cum arcu *AB* vel ejuſdem ſimul *CB* eo in caſu omnino coincidit & coaleſcit; uti jamjam oſtendimus.

II. Angulorum contactus in circulis Subtenſæ ſunt ſemper in duplicata ratione ſubtenſarum arcuum conterminorum.

Sint apud figuram eandem arcus duo quilibet *AB* & *Ab*; ſubtenſæ anguli contactus, tangenti perpendiculares, *DB* & *db* (æquales nempe ſinubus verſis eorundem arcuum *AC* & *Ac*;) ſubtenſæ ſive chordæ arcuum etiam *AB* & *Ab*: His arcuum ſubtenſis lineæ a puncto *G* ductæ *GB* & *Gb* erunt * perpendiculares, complentur rectangula *ADBC* & *Adbc*. Eſt autem *AB* quadratum † æquale rectangulo *AG* in *AC* vel *DB*; & pariter eſt *Ab* quadratum æquale rectangulo *AG* in *Ac* vel *db*. Atque adeo eſt ratio *AB* quadrati, ad *Ab* quadratum, eadem quæ rectanguli *AG* in *DB*, ad rectangulum *AG* in *db*, hoc eſt * eadem quæ lineæ *DB*, ad lineam *db*. *Q.E.D.*

* III. 31. *Elem.*

† VI. 8. *Elem.* *cum* VI. 17. *Elem.*

* VI. 1. *Elem.*

Corollarium. Eſt itaque ſubtenſa anguli contactus quævis *DB* vel *db* æqualis chordæ quadrato, ad circuli diametrum applicato. Eſt enim ut *AG* ad *AB*, ita *AB* ad *AC* vel *DB*; unde per auream regulam $BD = \frac{AB \times AB}{AG}$, ſive $= \frac{ABq}{AG}$. Et pariter *AG* ad *Ab*, ut *Ab* ad *Ac* vel *db*; unde $db = \frac{Abq}{AG}$. *Q.E.D.*

Coroll. (2.) In minimis lentium ſegmentis altitudines ſeu axes ſegmentorum *AC* & *Ac* eandem inter ſe rationem habere cenſendæ ſunt quam baſium ſive aperturarum *Eb* & *RB*, &c. quadrata. Eandem enim rationem habere *AC* & *Ac* oſtendimus quam habent ſubtenſarum quadrata; & cum in arcubus perexiguis ſubtenſæ vel ſinus eorumve dupla *RB* & *Eb* ſint fere inter ſe in eadem ratione, ſequitur & altitudines *AC* & *Ac* eandem fere rationem habere quam habent ſinuum duplorum *RB* & *Eb*, hoc eſt, aperturarum quadrata. *Q.E.D.*

Vid. Fig. p. 84.

Coroll. (3.) In angulis perexiguis exceſſus ſecantium ſupra radium ſunt etiam ut ſubtenſarum vel ſinuum, vel tangentium, vel etiam arcuum quadrata quam proxime. Exceſſus enim iſti *bf* & *BF* in iſto caſu cum ſubtenſis anguli contactus *bd* & *BD* quaſi coincidunt; atque adeo eandem fere cum iis rationem obtinent inter ſe. Sic ſane apud ſecantium tabulas videre eſt quod poſito radio circuli partium æqualium 10.000.000 exceſſus ſecantis minutorum duorum primorum eſt partium duarum, & exceſſus ſecantis minutorum quatuor primorum eſt partium octo: unde ſecantis prioris & radii differentia, eſt differentiæ ſecantis poſterioris arcus dupli & radii quadrupla; hoc eſt differentiæ iſtæ ſunt inter ſe ut arcuum quadrata, & ſic fere in reliquis.

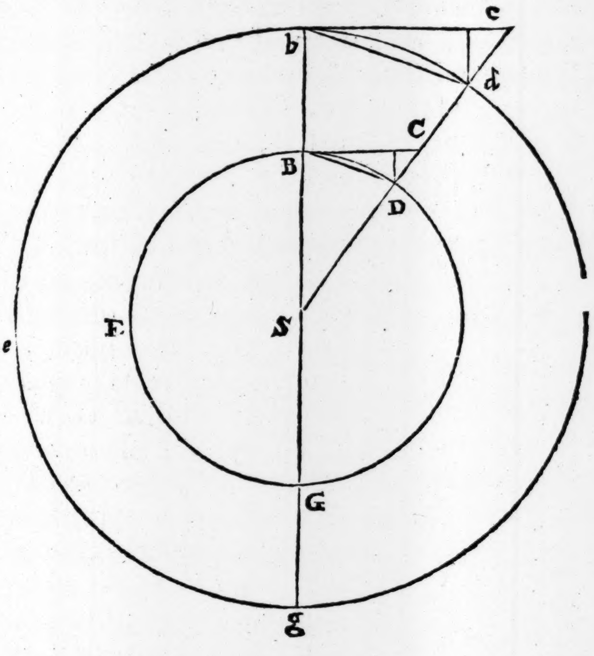
Vid. Fig. p. 84.

Coroll. (4.) Subtenſæ evaneſcentes anguli contactus ſunt ultimo in ratione duplicata arcuum conterminorum: Sunt enim ex prius demonſtratis ubique in ratione chordarum duplicata: Sed cum chordæ in arcus ultimo deſinant, hoc eſt, in diſtantiis infinite parvis cum iiſdem coincidant, & iiſdem æquentur, ut ſupra demonſtravimus, ſubtenſæ illæ erunt pari ratione hoc in caſu in ratione ipſorum arcuum duplicata.

Coroll. (5.) Unde quoque in eodem caſu ex corollario hujus propoſitionis primo erit ſubtenſa evaneſcens anguli contactus æqualis arcus ipſius quadrato, ad circuli diametrum applicato.

Coroll.

Coroll. (6.) Hinc colligitur nobile illud & fundamentale Newtoni, quin & Hugenii Theorema; Quod scilicet in circulari corporis motu vires centripetæ, sive gravitates in centrum sunt ubique ut arcuum simul descriptorum, vel velocitatum quadrata, applicata ad circulorum diametros vel radios. Describant nempe corpora *B* & *b* in circumferentiis circulorum *BD* ad *bd* gyrantia simul, & eodem dato tempore, arcus quam mi-



nimos *BD* & *bd*: Quoniam sola vi insita describerent tangentes *BC* & *bc* hisce arcubus æquales, per legem motus primam, manifestum est, quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atque adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima linearum nascentium *CD* & *cd*; hoc est, ut $\frac{BDq}{BG}$ ad $\frac{bdq}{bg}$; vel sumptis divisorum di-

midiis, ut $\frac{BDq}{BS}$ ad $\frac{bdq}{bS}$. & ob tempora periodica in arcuum ſimul deſcriptorum ratione reciproca, erunt vires illæ ut temporum periodicorum quadrata ducta in circulorum radios. Sin circuli ſint inter ſe æquales, ob datas diametros, vires iſtæ erunt inter ſe ut ipſa arcuum ſimul deſcriptorum vel velocitatum quadrata, uti olim plenius oſtendemus.

Prop. 10. *infra.*

Coroll. (7.) Præcedentis corollarii beneficio colligitur proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam cum vis illa quo tempore corpus percurrit lineam *B C*, ſive arcum eidem æqualem, impellat ipſum per lineam *CD*; quod ipſo motus initio æquale eſt quadrato arcus iſtius *BD* ad circuli diametrum applicato; & cum corpus omne vi eadem in eandem ſemper plagam continuata deſcribat ſpatia in duplicata ratione temporum, uti illico demonſtrabitur, vis illa quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum deſcribit efficiet ut corpus idem recta progrediens deſcribat ſpatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale: adeoque eſt ad vim gravitatis ut ſpatium illud ad ſpatium quod grave cadendo eodem tempore deſcribit. Exempli gratia ex pendulorum experimentis, & aliis etiam modis conſtat corpora quæcunque in loco vacuo pedes Anglicos 16, 14. ſcrupulo ſecundo ex vi gravitatis cadendo deſcribere; ſcire velim quam rationem vires centripetæ, quibus Luna in orbita ſua retinetur, habeant ad vim noſtram gravitatis: quam ut obtinere queam arcus orbitæ Lunaris ſcrupulo ſecundo deſcripti quadratum per ejuſdem orbitæ diametrum eſt dividendum, ut lineam quam Luna, ſi motu circulari abrupto tanquam grave deſcenderet, interea deſcriberet, inveſtigemus. Diſtantia Lunæ mediocris à centro Telluris eſt circiter ſemidiametri terreſtris ſexagecupla, ſive pedum Anglicorũ 1257.696.000.

Prop. (4.) *infra.*

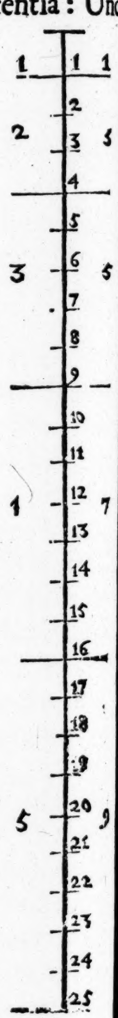
Ejus

jus proinde orbitæ circumferentia, si ad circularem ducamus, erit circiter pedum 7.897.834.380 : quam ripheriam cum Luna spatio mensis periodici, sive spa- o 27 dierum 7 horarum & 43 scrupulorum primorum, oc est, secundis scrupulis 2.360.580 conficiat, divida- r circumferentia 7.897.834.380 per scrupula secunda dem competentia 2.360.580, & Quotus 3.346 dabit ngitudinem arcus à Luna scrupulo secundo descripti, edibus nempe Anglicis exhibitam; cujus quadratum 1.128.976 per diametrum 2.515.392.000 divisum ex- hibebit 0.00443 partes pedis Anglici Centimillesimas, rupulo secundo a Luna cadente describendas, & scru- ulo primo 16$\frac{1}{1}$ pedes circiter; est ergo vis centripeta ve gravitas Lunæ ad vim centripetam corporum apud os in superficie telluris ut 0.00443, partes Centimil- simæ unius pedis ad 16$\frac{1}{1}$ pedes, hoc est, fere ut 1 ad 600. Atque adeo vis gravitatis versus terram ad unæ distantiam est pars tantum termillesima sexcen- sima vis gravitatis apud nos.

III. Corporis, urgente quacunque vi uniformi ac- lerati, velocitates sunt inter se ut tempora quibus vis a uniformis imprimitur; hoc est, duplo tempore dupla locitas, triplo tempore tripla velocitas, quadruplo qua- upla obtinebitur. Si enim vis accelerans sit æquabilis uniformis, ut hic supponitur, corpusque adeo sive ius quiescat, sive celeritate quacunque moveatur, & quales perinde velocitatis gradus & augmentum æquale quali tempore accipiat, manifestum est velocitatem rporis tempori esse ad amussim ubique proportiona- m: si enim prima quavis temporis particula data cer- m quamvis velocitatem vis illa generare potuerit, con- milem certe & æqualem velocitatem secunda æquali tem- ris particula generare poterit; consimilem etiam & æ- ualem tertia æquali temporis particula generabit; atq; ita arta, quinta, &c. temporis particula in infinitum. Unde in-

integra velocitas erit ubique ut temporis ſpatium quo vis illa generans corpori imprimitur. *Q. E. D.*

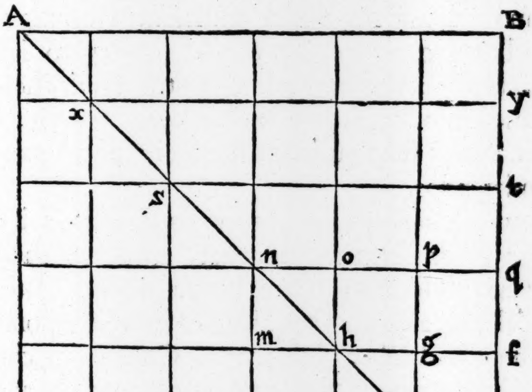
Corollarium. Cum itaque per experimenta conſtet, corpora quævis vi gravitatis accelerata velocitatis incrementa tempori proportionalia ubique ſumere, liquet vim gravitatis uniformiter agere, atque corpora celerrime deſcendentia æque afficere atque quieſcentia: Unde corporum gravitas nulli aeris preſſioni, vel ætheris impulſui, vel materiæ cujuſvis ad motum conatui mechanico aſcribi debet. Omnes enim hujuſmodi impulſus vel conatus corpus quieſcens maxime urgerent, & quo celerius moveretur corpus, eo minus uſque & uſque urgere poterant, donec tandem celeritate genita impulſui generanti æquali facta, ceſſaret omnis impulſus, nec ulla motus acceleratio deinde ſequeretur.



Lemmata ad Propoſitionem (4.)

(1.) NUmeri impares ſibi continuo additi numeros omnes quadratos conficiunt. Sic unitas eſt imparium numerorum primus, & etiam quadratorum numerorum primus: Si autem numerus ternarius qui eſt imparium ſecundus unitati addatur, conficietur quaternarius, quadratorum ſecundus; ſi porro numerus quinarius imparium tertius quaternario hactenus acquiſito addatur, conficietur novenarius, quadratorum tertius, & ita in infinitum. Hujus Lemmatis haud ignobilis demonſtrationem duplicem afferemus, alteram è Taquetio, è penu proprio alteram. Tacquetius itaque ſic

rem conficit, eſt, inquit, in progreſſione naturali imparium numerorum 1, 3, 5, 7, *&c.* ſumma tota æqualis quadrato numeri terminorum. *Arith. Pract. l. 5. C. 1. Theor. 7.* Nam ex natura progreſſionis Arithmeticæ ſumma omnium terminorum æqualis eſt producto ex dimidio ſummæ extremorum in numerum terminorum ducto; atqui dimidia ſumma extremorum progreſſionis Arithmeticæ numerorum imparium ab unitate incipientium eſt par numero terminorum, (pergit enim ab unitate per binos, ubi terminorum numerus per ſingulos pergit) adeoque productum illud eſt quadratum numeri terminorum. Ergo eſt ſumma tota numerorum imparium ab unitate incipientium æqualis quadrato numeri terminorum. *Q.E.D.* Nos ſic demonſtramus. Sit *ac* vel *ab* unitas & *ad* uni-

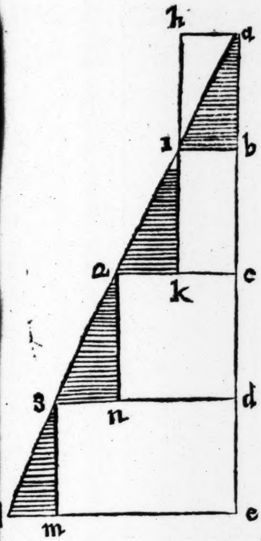


tatis quadratum; dico quod additio numerorum imparium 3, 5, 7, *&c.* neceſſaria eſt ad conficienda quadrata. *ah an as ax aA* numerorum omnium ab unitate procedentium, quadrato enim *ad* ſunt utrinque à binis lateribus addenda quadrata, nempe

ed

ed & *df* & per diagonalem ad verticem alterum quadratum *ig* eſt addendum, unde ad conficiendum quadratum *ſecundum* ſive binarii numeri, addenda ſunt quadrata tria, ſive numerum imparem ſecundum. Deinde per omnes reliquos terminos augendi ſunt numeri quadratorum addititiorum binario, ſi quadrata reliqua ſunt conficienda; tria nempe quadrata tribus prius additis correſpondentia *ki* & *lh* & *gq*, ſunt primo addenda, dein aliud quadratum *hp*, eo quod quadratum juxta diagonalem additum bina quadrata correſpondentia ſuperaddi ſemper requirit, cui ultimo eſt addendum alterum diagonale quadratum *mo*. Et ita ubique: Numero addendorum ſemper ſe invicem binario ſuperante, quo quadrata *ad ah an as*, &c. omnia ab unitate cœpta perficiantur. Unde facile ſequitur continuam numerorum imparium additionem omnes numeros quadratos generare. *Q.E.D.* Qui vero inductione quantum libet continuata contentus abibit, hoſce demonſtrandi modos ſatis tuto omittere poterit; quanquam faciliores ſunt quam ut hic loci eoſdem judicarem prætermittendos.

Lemma Secundum. Si corpus dato tempore à quiete gradatim & uniformiter diſcedat, atque eo pacto certam lineam deſcribat, Idem corpus eodem dato tempore à celeritate ultimo acquiſita uniformiter continuata lineam prioris duplam deſcribet. Cum enim corpus à quiete diſcedendo certum velocitatis gradum augmentis æqualibus acquiſiverit, linea ab eodem deſcripta erit in innumeras lineas gradatim à quiete majores diſpeſcenda & ſi iſtæ lineolæ gradatim creſcentes non in longum ſed ad latera ordine diſponerentur, triangulum quoddam *ab* 1 componerent, aut ſaltem juxta indiviſibilium methodum Cavallerianam componere cenſendæ ſunt: Ubi punctum verticale trianguli *a*, punctum quietis, & baſis 1 *b* motus lineam ultimam deſignat, reliquæque lineolæ parallelæ diverſæ velocitatis lineas quas corpus pertranſierat. Jam ſi lineam maximam



1 *b* designatam eodem tempore plenario adhibitam fuisse posueramus, sive à puncto *a* ad basim 1 *b* à latere dispositam tot lineas maximæ æquales, quot prius gradatim majores disposueramus, composuissemus parallelogrammum, prioris nempe trianguli * duplum: Atque adeo motus uniformis quam à quiete gradatim acquisitus dato tempore est duplo major. *Q. E. D.*

* I. 41. *Elem.*

IV. Lineæ quas corpora urgente vi quacunque uniormi describunt sunt in ratione temporum duplicata; oc est, si tempora sint minuta secunda unum, duo, ria, quatuor, quinque, *&c.* & ita ubique; erunt lineæ otæ descriptæ inter se ut unum, quatuor, novem, seecim, viginti quinque, *&c.* qui numeri sunt priorum uadrati.

Nam si corpus quodcunque urgente vi quacunque niformi minima aliqua temporis particula, puta miuto uno secundo, lineam aliquam cadendo describat, ecunda æquali temporis particula, ob vim priori æquaem etiamnum continuatam, lineam alteram priori æquaem describet; & ob motum prius gradatim acquisitum n integrum jam per æquale tempus contiuatum lineam etiam prioris † duplam decribet; ex causis itaque utrisque inter se onjunctis lineam prioris triplam describet. Tertia ero temporis particula ob vim gravitatis etiamnum urentem linea primæ æqualis describetur; & ob veocitatem prioris ad *b* duplam per tempus æquale coninuatam describetur linea, prioris ab eadem causa profectæ

† *Per Lem.* 2.

fectæ, dupla, hoc eft, primæ quadrupla; & ita ex viribus conjunctis linea jam defcripta erit primæ quintupla; atque ita porro linea à continua gravitatis impreffione primæ femper æqualis erit addenda, & altera linea primæ æqualis ob velocitatem una parte continuo auctam, atque adeo duæ partes five lineæ, primæ æquales, qualibet vice erunt addendæ; atque adeo lineæ integræ quavis fucceffiva temporis particula defcriptæ erunt numeris imparibus in perpetuum defignandæ. Cum itaque * numeri impares fibi additi quadratos omnes ordine conficiant, horum momentorum lineæ defcriptæ fimul additæ lineas integras momentorum, five temporis particulas fimul additas in ratione duplicata, five in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum neceffario exuperantes conficient. Sic fi minuto fecundo corpora ex vi gravitatis ferantur deorfum per fedecim circiter pedes Anglicanos, uti experientia conftat; duobus fecundis per fexaginta quatuor pedes, & tribus per pedes centum quadraginta quatuor circiter deorfum ferentur.

* *Per Lem.* 1.

Vel fic, ex mente Galilæi, in *Syftemate fuo Cofmico* propofitio demonftrabitur. Æqualia tempora per lineas æquales *ab bc cd de*, & velocitas in fine primi temporis per lineam *b*1 exponatur: Cum vero velocitas ifta quam eo loci habet corpus cadens non fimul & femel fed certo temporis fpatio per lineam integram *ab* expofito, ex continua & uniformi vi accelerante gradatim acquifita fuerit, uti jam diximus, itaque neceffe eft, ut reliquos omnes minores velocitatis gradus attigerit prius quam velocitatem *b*1 acquireret, unde priores iftæ velocitatis gradus per lineas minores à partibus temporis *ab* lineæque 1*b* parallelos ductas exponentur; & cum † velocitas cum tempore uniformiter crefcat, lineæ iftæ juxta indivifibilium methodum triangulum

Vid. Fig. p. 93.

† *Prop.* 3. *fupra.*

m *ab* 1 conſtituent & component. Tota itaque linea ıæ ab omnibus iſtis velocitatibus ſimul junctis deribetur, erit aggregato omnium iſtarum linearum, hoc ſt, ipſi triangulo *ab* 1 proportionalis; & per idem trianulum recte exponetur. Secundo vero tempore cum corus jam acquiſierit velocitatem lineæ *b* 1 proportionaem, & per eandem expoſitam, ea ſola velocitate contiuata deſcribet lineam lineæ prioris duplam, & per parallelogrammum proinde *ab* 1 *h* vel *b* 1 *kc* trianguli *ab* 1 uplum exponendam; & inſuper velocitate nova, ut rius, à vi perpetuo & uniformiter urgente orta deſcrietur linea lineæ primæ æqualis; & proinde per æquale riangulum 1 *k* 2 exponenda; ergo ſi vim utramque ſinul addas tempore ſecundo, linea deſcripta erit prioris ripla; & per trapezium *b* 1 2 *c* exponenda; & ſumma inearum primo & ſecundo tempore deſcriptarum, erit d lineam primo tempore ſolo deſcriptam, ut triangum *ac* 2 ad triangulum *ab* 1; hoc eſt, in duplicata ratine laterum homologorum *ac* & *ab* tempora exponenium, ſive ut temporum ipſorum quadrata. Pariter ertio tempore corpus celeritate hactenus acquiſita, ſive motus jam acquiſiti mera permanentia, lineam per parallelogrammum *c* 2 *nd* exponendam deſcribet; & vi additia nova ex gravitate etiamnum uniformiter urgente orta ineam per triangulum 2 *n* 3 exponendam deſcribet. Unde linea tertio tempore deſcripta erit primæ quinupla, & per trapezium 2 *cd* 3 exponenda; & ſumma inearum primo, ſecundo, & tertio tempore deſcriptarum, rit ad lineam primo tempore ſolo deſcriptam, ut triangulum *ad* 3 ad triangulum *ab* 1, ſive ut temporum *ad* & *ab* quadrata, & ita porro in infinitum. *Q. E. D.*

Corollarium. Cum ex prius demonſtratis celeritas ſit ubique tempori proportionalis, & cum lineæ à corporibus decidentibus deſcriptæ ſint in temporum ratione duplicata, ſive ut quadrata temporum, erunt etiam eædem lineæ in celeritatum ratione duplicata, ſive ut quadrata velocitatum: Sic, exempli gratia, ſi duorum

cor-

corporum cadentium in terram velocitates ultimo acquisitæ sint inter se ut numerus binarius est ad unitatem, erunt casus altitudines inter se ut numerus quaternarius ad unitatem. Si unius velocitas sit alterius velocitatis tripla, erit ejusdem descensus altitudo, alterius altitudinis noncupla, & ita porro in infinitum.

Novemb. 13. 1704.

X.

V. SI corpus celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cœperit, ad eandem altitudinem eodem tempore ascendet unde prius descenderat; & velocitatem suam æqualibus temporibus æqualiter amittet.

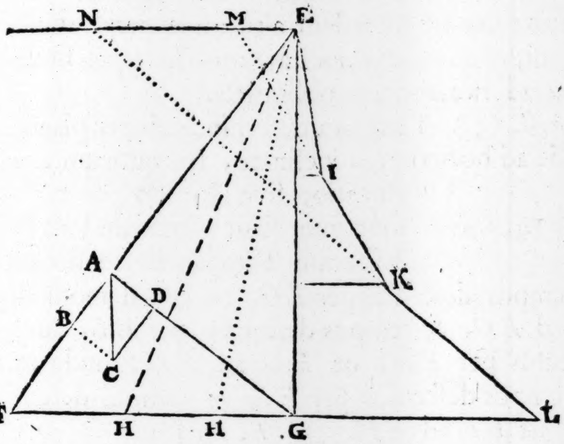
Nempe ex vi demonstratorum in propositione postrema velocitas semel acquisita ut 3 *d* parallelogrammum, sive descendendo sive ascendendo, æquale prorsus semper describet; sed cum nova vis gravitatis in descensu adauget istud parallelogrammum triangulo 3 *m* 4 & idem in ascensu æquali triangulo diminuit, liquet trapezium jam ascendendo describendum idem fore cum parallelogrammo in descensu prius descripto; 3 2 *c d*, atque ita porro: Unde lineæ descriptæ hisce trapeziis proportionales, & velocitates istorum trapeziorum basibus proportionales, erunt ubique datis temporibus eædem in ascensu quæ prius in descensu fuerant; donec tandem corpus ad punctum *a* ascensus ultimum eodem tempore pertingat, quo ab eodem prius descenderat. *Q. E. D.*

VI. Celeritates gravium super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitæ æquales sunt, si planorum elevationes sive altitudines perpendiculares fuerint æquales.

Sit *E G* linea horizonti perpendicularis, & *E F* linea

ea ad horizontem in angulo quocunque inclinata, & t *GA* ad *EF* perpendicularis; Dico quod corpus rave quodcunque eandem velocitatem acquiret per neam inclinatam *EF* descendendo, quam casu perpendiculari per lineam *EG* acquirere posset. Est enim x prius demonstratis vis gravitatis in plano obliquo *EF*, ad vim gravitatis in perpendiculari *EG*, ut *AB*, ad *AC*, sive, ob similia triangula *ACB EFG*, t *EG* ad *EF*; sive etiam ob simile hisce triangu-

Coroll. 2. Met. Leg. 3.



um *EGA*, ut *EA* ad *EG*. Unde ob vires diversas erunt motus & velocitas corporis per *EA* in plano inclinato descendentis, ad motum & velocitatem corporis per *EG* descendentis, dato illo descensus perpendicularis tempore, ut *EA* ad *EG*; sive ut *EG* d *EF*; & velocitas descendentis per *EA*, ad velocitatem descendentis per *EF*, in subduplicata ratione *EA* ad *EF*, hoc est, in ratione *EA* ad *EG*. Est ergo velocitas corporis n puncto *A* ad velocitatem in puncto *F*, & ad velocitatem descendentis perpendiculariter in puncto *G*, in adem ratione, nempe lineæ *EA* ad lineam *EG*, vel

† VI. 8. Elem.

lineæ *E G* ad lineam *E F:* Unde æquantur illæ velocitates ſibi invicem. *Q. E. D.*

Corollarium (1.) Dum corpus perpendiculariter cadens deſcribit lineam *E G*, corpus oblique cadens deſcribit lineam *E A*, per perpendicularem *G A* determinatam.

Corollarium (2.) Tempus caſus perpendicularis, ad tempus deſcenſus obliqui, eſt in ſubduplicata ratione lineæ *E A* ad lineam *E F*; ſive ut linea *E A* ad lineam *E G*, hoc eſt, in ratione altitudinis perpendicularis *E G* ad lineam obliquam *E F*. Unde quanto minuitur velocitas, ob vim diminutam, tanto augetur, ob tempus auctum; ita ut in eadem altitudine perpendiculari eadem uſque maneat velocitas, qualiſcunque ſit caſus inclinati ad horizontem obliquitas.

Coroll. (3.) Tempora deſcenſuum ſuper planis diverſimode ad horizontem inclinatis, ſed quorum eadem eſt elevatio, ſive altitudo perpendicularis, ſunt inter ſe ut planorum longitudines. Eſt enim Tempus deſcenſus per *E F*, ad tempus deſcenſus per *E G*, ex jam demonſtratis, ut *E F* ad *E G*, & tempus deſcenſus per *E G*, ad tempus deſcenſus per *E H*, ut *E G* ad *E H*; unde ex æquo erit tempus deſcenſus per *E F*, ad tempus deſcenſus per *E H*, ut *E F* ad *E H*. *Q. E. D.*

Vid. Fig. p. 97.

Coroll. (4.) Si ex altitudine eadem perpendiculari deſcendat mobile continuato motu per quotlibet, & quælibet plana contigua, puta *E I IK KL* utcunque inclinata, ſemper eandem in fine velocitatem acquiret: quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine. Nempe ex Hugenii mente eadem erit cadentis velocitas juxta jam demonſtrata ad punctum *I*, ſive per *E I*, ſive per *M I*; unde eadem etiam velocitas erit quoque pergendo per *I K* eadem nimirum quæ per *N K*, unde quoque eadem velocitas erit ad punctum *K* ſive per *E I* & *I K* ſive per *M K*, vel etiam per *N K*; unde ſequetur eadem velocitas

Vid. Fig. p. 97.

as pergendo per *KL*, & ad punctum *L*, quæ esset si escensus esset per planum unicum *NL*, vel per duo MK & *KL*, vel etiam per tria *EI IK KL*; eadem empe ex jam demonstratis quam mobile cadens perpenicularitet ad punctum *G* acquirere potuit. *Q. E. D.*

Coroll. (5.) Hinc liquet etiam, ex ejusdem Hugenii nente quod, per circuli circumferentiam, vel cycloiem, vel curvam quamlibet lineam descendente mobili, adem semper acquiretur velocitas, si ab æquali altituine descenderet: & quod ista velocitas tanta erit quanam corpus casu perpendiculari ex eadem altitudine acuirere debuit. Sunt enim curvæ lineæ quasi ex innueris rectis compositæ; & cum vera sit propositio in erimetris ectilinea ibus quotcunque, vera etiam erit bi numerr sunt infinitæ, hoc est, ubi in lineas curvas esinunt. *Q. E. D.*

Coroll. (6.) Hinc etiam liquet quod si grave à deensu sursum convertat motum suum, ascendet ad eanem unde venit altitudinem per quascunque planas suerficies contiguas & quomodocunque inclinatas incesrit. Nempe ut * prius, eadem erit elocitas in puncto quovis *K* & *I*, ive grave descendat, sive ascendat; nde certe & idem erit velocitatis ascendentis vel deendentis Limes sive terminus ad punctum *E*. Unde tiam si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si uperficies sit curva, mobile per hanc curvam quoque d eam ex qua venit altitudinem nec ultra, assurget.

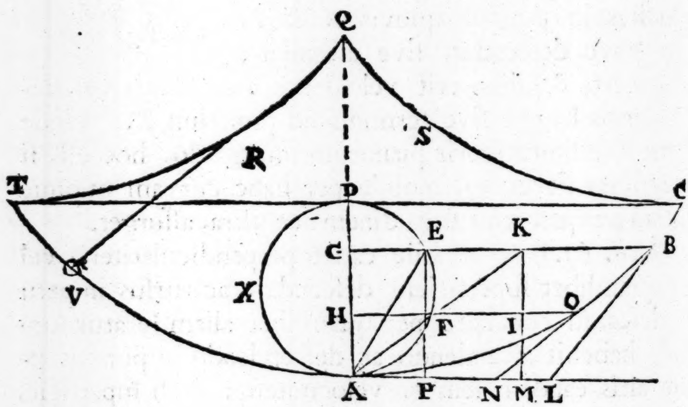
* Prop. 5. Vid. Fig. p. 97.

Coroll. (7.) Si mobile cadat perpendiculariter, vel er quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu x descensu concepto per quamlibet aliam feratur surum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æue altis eandem semper velocitatem: & si superficies scensus sit superficei descensus similis & æqualis; æquali empore ascendet quo prius descenderat. Hæc nempe deo liquido ex jam demonstratis sequuntur, ut pluribus on sit opus.

Lemmata ad Propositionem septimam.

Lem. (1.) SI qua curva linea eo modo ſit comparata, ut vim gravitatis pro longitudinis ſuæ ratione ubique ſuſtineat; ita ut quo lineæ pars deſcribenda ſit major, eo & vires acceleratrices ſint etiam in eadem omnino ratione majores; atque ut quo lineæ pars deſcribenda ſit minor, eo & vires acceleratrices ſint in eadem pariter ratione minores, tempora deſcenſus per iſtiuſmodi curvam, ſive arcus deſcripti ſint majores ſive minores, erunt ſibi invicem ſemper æqualia. Velocitas enim dato tempore eſt ut vis motrix; ſi itaque linea deſcribenda ſit etiam ut eadem vis motrix, neceſſe eſt ut ſit pariter ut velocitas; ſi autem motus velocitas ſit ubique ut linea deſcribenda, palam eſt lineam quamcunque ſive parvam ſive magnam eodem tempore deſcribi debere. Quod autem Cyclois hujuſmodi ſit linea curva in ſequentibus patebit. Eſto itaque.

Lemma (2.) Sit *DAC* ſemicyclois, *DFA* ſemicir-



culus genitor, & à puncto quovis *B* in cycloide ducatur linea *BE* baſi *DC* parallela, occurrens ſemicirculo genitori in *E*; ducatur chorda *AE*, & à puncto *B* in cycloide

cycloide linea *BL* chordæ *AE* parallela: Erit Linea *BL* cycloidis Tangens in puncto *B*.

Lemma (3.) Et *AB* arcus cycloidis erit æqualis duplæ chordæ *AE*. Hæc duo postrema Lemmata uti prius obſervatum ex Elementis Cycloidis conſtant: & à Cl. Wrennio noſtro aliiſque demonſtrata extant.

Vid. Wallis. Op. Vol. 1. *p.* 533. *&c.*

VII. In Cycloide, cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile à quocunque in ea puncto dimiſſum ad punctum imum verticis pervenit ſunt inter ſe ſemper æqualia.

Sint arcus in Cycloide quicunque *BA* & *OA*, *BL* & *ON* tangentes in punctis *B* & *O*, iiſque, per Lemma Secundum, reſpective parallelæ ſemicirculi genitoris chordæ *EA* & *FA*; producatur *AF* ad punctum *K*: Sunt itaque, per Lemma Tertium, lineæ deſcribendæ à mobili nunc ad *B*, nunc ad *O* poſito, ut chorda *EA* ad chordam *FA*: Eſt vero in eadem ratione vis ſecundum tangentem *BL*, eive parallelam *EA*, ad vim ſecundum tangentem *ON*, eive parallelam *AF*. Nam * ut quadratum *EA*, ad quadratum *FA*, ita ſinus verſus *EP*, ad ſinum verſum *FP*; vel ita *KM* ad *FP*; vel ita *KA* ad *FA*. Eſt ergo Chorda *AE* inter Chordam *AF* & lineam *AK* media Geometrice proportionalis; atque adeo *AF AE AK* $\div\!\!\div$. Sed ex prius demonſtratis eſt vis gravitatis in plano *AE*, ad vim gravitatis in plano *AF*, ut *AK* ad *AE*; hoc eſt, ut *AE*, chorda, ad *AF* chordam; atque ita ubique. Erat autem linea deſcribenda modo ut eadem *AE* ad eandem *AF*; atque proinde vis acceleratrix eſt ubique in eadem ratione atque linea deſcribenda, & tempora deſcenſus ex conſequenti ſunt ubique æqualia. *Q. E. D.*

* *Prop.* 2. *ſupra.*

Coroll. 2. *Poſt Leg. Mot.* 23. *prius.*

Coroll. (1.) Si itaque integras alias ſemicycloides *QRT QSC*, prioribus *AT* & *AC* ſimiles & æquales,

les, quarum vertices basin alterius ad puncta T & C contingunt efformemus, & corpus grave V filo QRV ipsi QDA sive duplæ DA æquali à centro Q pendeat; & inter istas semicycloides QRT QSC agitetur, grave pendulum ex fili QRV evolutione cycloidem integram primariam describet, uti ex Cycloidis affectionibus constat; & cujuscunque amplitudinis oscillationes usque ad omnium maximam per arcum TAC iisdem ad amussim temporibus conficiet; atque ita ut appensi corporis centrum oscillationis in ipsa curva TAC semper versetur.

Coroll. (2.) Cum oscillationes quævis in cycloide sint semper isochronæ, & cum oscillationes minimæ in arcu minimo circuli, cujus radius est QA, & in arcu minimo Cycloidis TAC, ob arcus circuli & Cycloidis in puncto imo, hoc in casu plane coincidentes, sint eædem; liquet tempus oscillationis cujusque in Cycloide æquale esse tempori oscillationis minimæ in circulo, cujus radius est diametri circuli genitoris duplus.

Coroll. (3.) Ob eandem etiam in puncto imo arcuum minimorum circuli & Cycloidis coincidentiam, erunt & oscillationes in circulo eo magis isochronæ quo arcus descripti sunt minores; ita ut in arcubus perexiguis pro isochronis haud immerito haberi possint.

Coroll. (4.) In horologiis itaque oscillatoriis, quæ longioribus utuntur pendulorum corporum filis vel retinaculis quibuscunque, tempora oscillationum ob arcus minores descriptos magis ad æqualitatem vergunt quam in iis quæ brevioribus filis utuntur; atque adeo horologia priora posterioribus sunt longe anteferenda.

Coroll. (5.) Tempora oscillationum per diversas Cycloides sunt in ratione subduplicata Cycloidum vel radiorum QA: sive longitudines pendulorum sunt in ratione temporum duplicata: hoc ex prius demonstratis huic casui applicandis facile constare poterit. Sed notandum, idem etiam esse de temporibus oscillationum in circulis æque ac in Cycloidibus intelligendum: Sic sane

Prop. 4. prius.

quia

quia pendulum 39⌊25 digitorum oſcillationes quaſvis in Cycloide, & minimas etiam in circulo tempore minuti unius ſecundi conficit, pendulum 157 digitorum oſcillationes conſimiles tempore minutorum duorum ſecundorum, & pendulum 353⌊25 digitorum oſcillationes conſimiles tempore minutorum ſecundorum trium eſt confecturum.

Coroll. (6.) Cum tempora oſcillationum quarumvis ſint in ſola Cycloide æqualia; & eo tantum nomine in arcubus minimis circularibus pro æqualibus habendæ quod circa punctum imum nec alibi arcus iſti circulares cum Cycloidis arcubus fere coincidant, dum alias arcus circulares majores ab arcubus majoribus Cycloidis ſatis longe diſcrepent & diſcedant, manifeſtum eſt pendula in diverſis circuli arcubus majoribus oſcillantia oſcillationes minime iſochronas obtinere, & eo minus iſochronas qua major eſt arcuum deſcriptorum differentia. Sic ſane, ex Hugenii calculo, eſt tempus deſcenſus per totum circuli quadrantem, ad tempus per arcum minimum, fere ut 34 ad 29, nimirum ſi oſcillationes in vacuo peractas ſine ulla aeris reſiſtentia ſupponamus. Unde ſane ſequitur differentiam remporum in hoc caſu ultra ſeptimam temporis totius etiam majoris partem aſſurgere, & proinde eſſe experimentis quibuſvis ſatis ſenſibilem; ſi nempe temporis ſpatium 10 & 20, plurimve oſcillationum maximarum cum totidem minimarum temporis ſpatio conferamus.

Horolog. Oſcill. pag. 9.

Coroll. (7.) Quoniam conſtat per experimenta pendulorum & calculum inde initum quod oſcillationes ſingulæ ex deſcenſu & aſcenſu compoſitæ, ubi penduli longitudo eſt 96⌊85 digitorum, quælibet nempe in Cycloide & minimæ in circulo; ſpatio minutorum tertiorum 94⌊25, ſive ſecundi unius & tertiorum 34⌊25 peragantur; & quoniam ex Hugenii demonſtratis Tempus hujuſce oſcillationis eſt ad tempus caſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris qua-

druplicatam, ſive per longitudinem penduli duplicatam digitorum 193,76, hoc eſt, pedum Anglicorum 16,1, ut eſt circuli circumferentia ad diametrum duplicatam, ſive ut 94,25 minuta tertia ad 60 ejuſdem generis minuta; ſive ad minutum ſecundum unicum. [Eſt eſt enim ut 355: ad 226 :: ita : 94″,25 : ad 60″ = 1′.] Inde ſequitur, quod unius ſecundi ſpatio corpus grave per 16,1 pedes Anglicos ſive $15\frac{1}{12}$ Pariſienſes vi gravitatis ſuæ deſcendet. Quæ ſane deſcenſus velocitas, ex pendulorum experimentis deducta, cum cadentium corporum experimentis à Cl. Hugenio captis apprime convenit; atque adeo pro velocitate deſcendentium corporum vera eſt indubie habenda.

Horolog. Oſcill. pag. 57, 58. Et De vi Centrifuga Prop. 12.

Horolog. Oſcill. p. 155, 156.

Coroll. (8.) Data ergo corporis cadentis ſpatio unius ſecundi linea perpendiculari, datur una & linea, ſeu perpendicularis ſeu obliqua temporis ſpatio quocunque ſive majori ſive minori ex eadem gravitatis vi deſcribenda: quippe quæ ſit ubique in ratione temporis duplicata. Sic in directe cadentibus, ut temporis cujuſvis, puta minutorum ſecundorum decem, quadratum = 100 ad unius minuti ſecundi quadratum = 1, Ita erunt 1610 pedes Anglici minutis illis decem deſcripti, ad 16,1 pedes Anglicos unico minuto, uti jam vidimus, deſcriptos, atque ita ubique. Neque multo aliter in obliquis res ſe habet. Lineæ enim deſcenſus in plano quolibet obliquo ſunt etiam pari ac priores jure inter ſe ut quadrata temporum: id tantum intereſt, quod vis gravitatis continuo agens minuenda eſt hoc in caſu in ratione lineæ perpendicularis ad obliquam; nempe EG ad EF, vel EA ad EG. Cum enim, uti antea oſtendimus, corpus grave obliquum per lineam EA eodem tempore deſcendit quo perpendicu-

Prop. 4. prius.

Vid. Fig. p. 97. Coroll. (1.) Prop. 4. prius.

lare

lare per lineam *EG*. Liquet vires motrices eſſe ubique in eadem ratione. Ponamus itaque corpus grave per planum adeo obliquum deſcendere, ut *EG* ſit tertia tantum pars ipſius *EF*, vel, quod perinde eſt, ut *EA* ſit tertia tantum pars ipſius *EG*; Oportebit tantum gravitatis vim in eadem ratione diminuere, ita ut ſpatio minuti unius ſecundi corpus per lineam ſolum pedum 5L37 deſcendere ſupponatur, & calculus ut prius in directe cadentibus adminiſtrabitur.

Novemb. 27. 1704.

XI.

VIII. PROJECTILIA omnia quæ non ſunt horizonti perpendicularia Parabolas deſcribunt, niſi quatenus per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur,

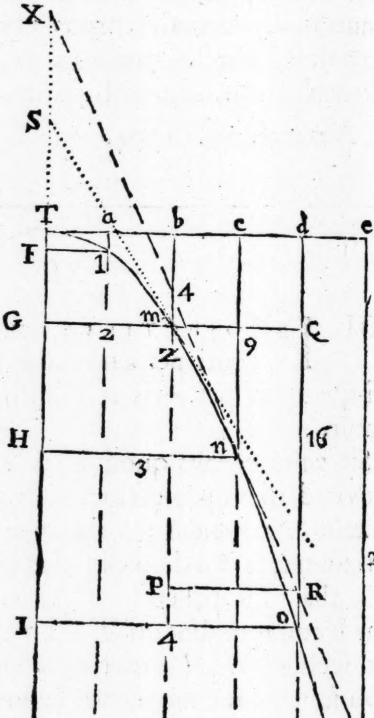
Sit enim corpus quodvis ad *T* poſitum, & tempore quovis dato vi projectionis horizontalis ſecundum tangentem *Te* tendat; ea nempe velocitate qua lineam horizontalem *Ta* dato illo tempore deſcriberet, ſi modo nulla alia vi impelleretur: Accedat jam vis gravitatis & agat ſecundum lineam *TK* horizonti perpendicularem, aut ſecundum *al bm cn do ep* ipſi *TK* parallelas; (Ob ingentem enim centri telluris, quo tendit vis gravitatis, diſtantiam, lineæ ad illud ductæ pro parallelis haberi debent) cum itaque vis projectionis motum ſecundum directionem ſuam *Te* vel ſecundum *FI Gm Hn Io Kp* ipſi *Te* parallelas motum æquabilem & uniformem pariat; neque velocitas hujus motus ſecundum directionem primariam quicquam patitur ex vi gravitatis acceſſoria, uti olim oſtendimus, Corpus in fine primi temporis reperietur alicubi in linea *al*, in fine ſecundi temporis alicubi in linea *bm*, in fine tertii in *cn*, quarti in

Coroll. 1. *Poſt Leg. Mot.* 22.

do,

do, quinti in *ep* lineis nempe iſtis æquali ubique intervallo inter ſe diſtantibus. Accedat jam vis gravitatis, & dum corpus vi ſola projectili lineam *Ta* deſcriberet, vi ſola gravitatis per lineolam quamvis *TF* vel *al* acceleretur, quoniam itaque ex hac vi gravitatis, ſi ea ſola agitaretur, corpus in fine primi temporis ad lineam *Fl*, accederet; & cum velocitas hujus motus deorſum pari ac prioris ratione nihil patiatur ex vi projectionis acceſſoria, repetrietur etiamnum alicubi in linea *Fl*: Sit itaque *al* partis unius, *bm* partium 4, *cn* partium 9, *do* partium 16, *ep* partium 25, & ita porro in infinitum; nempe ut temporum ſive diſtantiarum *Ta Tb Tc Td Te* quadrata: Liquet igitur ex prius demonſtratis corpus in fine temporis ſecundi repertum iri alicubi in linea *Gm*, in fine tertii temporis in linea *Hn*, quarti in *Io*, quinti in *Kp*, & ita porro in infinitum.

Prop. 4. *prius.*



Neceſſe

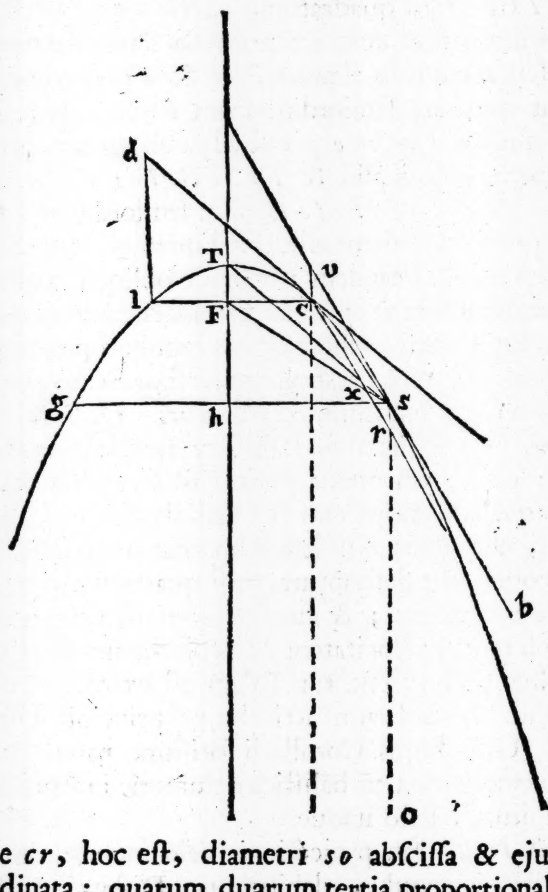
Necesse est ergo ut projectile quovis tempore exeunte ex conjunctis viribus in linearum istarum intersectionibus reperiatur, nempe in fine primi temporis corpus in puncto *l* reperietur, in fine secundi in puncto *m*, in fine tertii in *n*, quarti in *o*, quinti in *p*, & ita ubique. Quare cum ex natura hujusmodi motus compositi *TF*, sit ad *TG*, ut *Fl* quadratum, ad *Gm* quadratum, & ita in reliquis; & cum ex primaria Parabolæ proprietate abscissæ cujusvis diametri *TF* & *TG* sint etiam inter se ut quadrata semiordinatarum *Fl* & *Gm*, liquet puncta quævis *l m n o p* esse ad parabolam, cujus *TK* est Diameter principalis, & *TF TG TH TI TK* sunt abscissæ, & *Fl Gm Hn Io Kp* sunt semiordinatæ. Cum autem omnia hic demonstrata ad quamvis diametrum, ubi tangens est ad eandem utcunque obliqua, æque pertineat ac ad ipsum axem, ubi est ad eundem perpendicularis, liquet universaliter omnes omnium projectilium trajectorias esse vere Parabolicas; nisi quatenus per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc artis Balisticæ fundamenta discere licebit: cum enim omnia projectilia secundum inclinationem qualemcunque emissa Parabolas aut majores, aut minores, aut saltem ejusdem parabolæ partem majorem aut minorem sint descriptura, nisi quatenus ab aeris resistentia retardentur; & cum aeris retardatio in arte balistica ob motus velocitatem & projectorum soliditatem sit nullius pene momenti; Palam est ex natura & proprietatibus Parabolarum artis hujus principia esse petenda. Usus hujus Corollarii latissime patet, & pluribus exemplis ex arte balistica desumptis in sequentibus illustrabitur. Esto itaque

Coroll. (2.) Data projectionis velocitate, quicunque sit elevationis angulus, dabitur una Distantia foci Parabolæ quam projectile describit à projectionis incipientis puncto. Sit *s* punctum projectionis, ubi projectile per tangentem *sv* vibratum in curva parabolica incipit incedere, & sit *sv* linea quovis dato tempore à vi pro-

ejectili

jectili sola describenda; sit etiam vc vel sr lineola eodem dato tempore, vi gravitatis sola, describenda: In fine itaque istius temporis projectile reperietur in Parabolæ puncto c, & ob datam gravitatis, æque ac projectionis vim, dabuntur etiam, qualiscunque sit tangentis ad horizontem inclinatio, lineæ vc sive sr &



sv sive cr, hoc est, diametri so abscissa & ejusdem semiordinata; quarum duarum tertia proportionalis est Latus rectum ad verticem s pertinens; quod itaque ex datis prioribus necessario dabitur. Unde & istius lateris recti pars quarta, quæ ipsa est verticis s à parabolæ foco distantia una dabitur. Qamquam itaque ex eadem pro-

projectionis velocitate diversæ Parabolæ, in diversis elevationibus describantur, erunt tamen earum omnium foci à vertice sive puncto motus incipientis æqualibus intervallis distantes, & proinde in circuli cujus centrum est in isto puncto, circumferentia positi. *Q.E.D.*

Coroll. (3.) Jactus itaque horizontalis longissimus is est qui secundum lineam inter horizontalem & perpendicularem mediam, sive in angulo 45 graduum supra horizontem dirigitur. Nempe cum vertex principalis Parabolæ cujusvis à projectilibus descriptæ sit in summa projectilis altitudine, sub quo in ipso axe, focus figuræ F collocatur; cum ejusdem foci à vertice s distantia ex corollario postremo detur; cum etiam jactus horizontalis longissimus per ordinatam ad axem per verticem s transeuntem eg omnino mensuretur; tum certe jactus horizontalis erit longissimus ubi verticis s à foco distantia sF cum ordinata ad axem sg coincidit: Alias enim ob datam foci distantiam sF sg erit minor quam sF duplicata: Sed ubi coincidit sF cum sg erit sg ipsius sF dupla, atque adeo jactus horizontalis sg erit eo loci omnium longissimus, ubi sF distantia foci à vertice s cum sg coincidit; hoc est, ubi angulus vsh est semirectus: Angulus enim vsF à tangente vs & verticis s à foco distantia sF comprehensus æqualis semper est angulo bso, ab eadem tangente bs, & Parabolæ diametro so comprehensus. Si itaque angulus bso sit semirectus, erit etiam & vsF semirectus, atque proinde angulus osF erit rectus, & linea sF evadet sh, & cum ordinata sg coincidet, fietque ordinata sg jactus omnium longissimus.

Coroll. (4.) Cum itaque Parabolæ tangens eo solo in casu cum diametro angulum semirectum comprehendat, ubi eandem ad lateris recti principalis per focum transeuntis terminum contingit, patet jactum horizontalem longissimum quemvis intra curvæ parabolicæ partem supra latus rectum positam, existente foco in ipsa linea horizontali, esse comprehensum; & altitudinem sum-

mam

mam in hoc casu ab horizonte esse TF lateris recti principalis quadrantem.

Coroll. (5.) Si angulus elevationis à semirecto æqualiter deficiat, sive elevatio sit major sive minor, jactus longissimus horizontalis æqualiter minuetur. Nimirum ob angulum rectum hso, & angulos vsF osb semper sibi invicem æquales, eorum sive excessus supra rectum, sive defectus, à recto æquales æquabuntur angulo Fsh, sive focus F sit supra lineam horizontalem sg, ut in elevatione majore, sive sit infra eandem, ut in minore. Datis autem angulo Fsh acuto, & recto Fhs, & latere Fs, datur unà latus sh axis semiordinata, & sg ordinata jactum horizontalem determinans. Sic sane in projectionibus æque velocibus ubi anguli elevationis sunt graduum 40 & graduum 50 jactus horizontalis erit utrinque æqualis, & perinde in gradibus 30 & 60, in gradibus 20 & 70, & ita ubique, uti in arte balistica est notissimum.

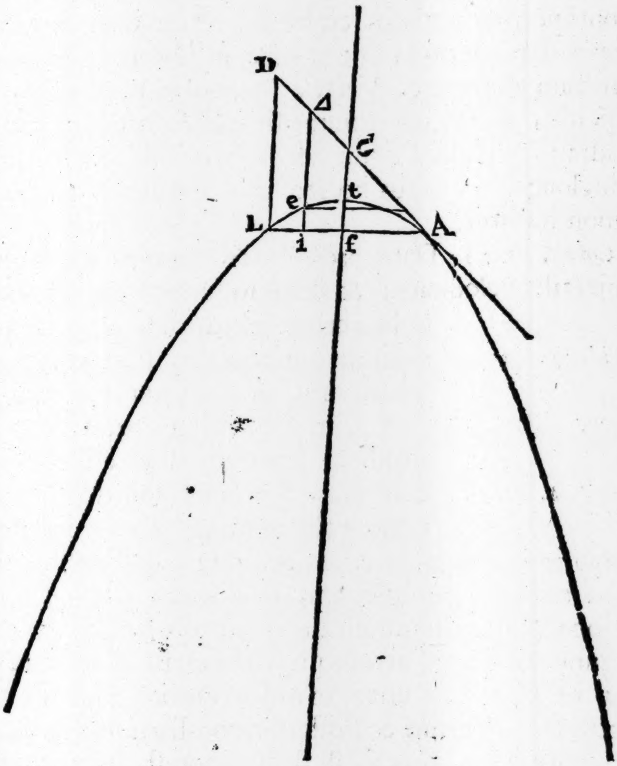
Coroll. (6.) Distantiæ horizontales ex data velocitate genitæ in diversis elevationis angulis sunt ut angulorum tangentis & perpendicularis duplicatorum sinus recti. Nempe ut gs ubique ita est ejusdem dimidium hs: In triangulo autem rectangulo Fhs ob datum radium Fs, & angulum hFs, anguli tangentis & perpendicularis bso duplum, erit sh ubique istius anguli sinus rectus, adeoque erunt semper distantiæ horizontales inter se ut sinus isti.

Coroll. (7.) Tempora jactus cujusque horizontalis ex data velocitate in diversis elevationis angulis sunt inter se ut angulorum elevationis sinus recti. Projiciatur corpus unum secundum angulum elevationis lcd, & alterum secundum angulum LAD; dico quod tempus quo corpus prius per arcum parabolicum cTl pertingit ad punctum l, in eodem cum puncto à plano horizontali situm, erit ad tempus quo corpus posterius per arcum AtL pertingit ad punctum L in eodem cum

Vid. Fig. p. 108, & 111.

puncto

punĉto *A* plano horizontali ſitum, ut ſinus anguli *dcl* ad ſinum anguli *DAL*. Sit apud figuras haſce Δ*A* æqualis ipſi *dc*: Erit etiam Δ*e* (ob temporis æqualitatem, quo corpora ſimul lineas æquales *dc* & Δ*A* vi ſola projectili deſcriberent) ipſi *dl* æqualis. Eſt autem ex natura Parabolæ prius expoſita, *DL* ad Δ*e* ut *DA* quadratum, ad Δ*A* quadratum; ſive ut *DL* quadratum, ad



i quadratum. Ergo *DL* Δ*i* Δ*e* ſunt tres lineæ continue roportionales: Et cum lineæ *DL* *e* ſint in duplicata ratione temporum, unt Δ*i* & Δ*e* in ipſa ratione temporum: Eſt ergo Tempus prius, ad tempus poſterius ut *e* ſive *dl*, ad Δ*i*; hoc eſt, ut ſinus angulorum elevatiis *dcl* & *DAL*. Q.E.D.

Prop. 4. prius.

Coroll.

Coroll. (8.) Altitudines maximæ corporum data velocitate projectorum in diversis elevationis angulis sunt inter se ut quadrata sinuum rectorum angulorum elevationis. Nempe ut dl vel Δe quadratum ad Δi quadratum, ita altitudines maximæ dl vel Δe, ad DL. *Q.E.D.*

Coroll. (9.) Altitudo omnium maxima corporum velocitate data projectorum, ubi nempe projectio est horizonti perpendicularis, est lateris recti in data velocitate semper dati pars quarta; nempe in hoc casu, parabola in rectam desinente, Vertex Parabolæ T cum foco F coincidit, & altitudo summa fit ipsi Fs lateris recti dati quadranti æqualis: atque adeo, quod obiter est notandum, longissimi jactus horizontalis semissis: uti statim demonstrabitur.

Coroll. (10.) Dato projectionis angulo, sed mutata projectilis velocitate; & altitudo summa, hoc est, Parabolæ vertex principalis, & jactus longissimus horizontalis, sive ordinata sg, mutabuntur in duplicata velocitatis ratione. Pars prior ex prius demonstratis patet; cum altitudines linearum sive ascensus sive descensus, sint semper in duplicata ratione velocitatum. Et ex hac parte propositionis sequitur etiam & altera; ob similitudinem enim omnium parabolarum, si altitudo Th mutetur in ratione velocitatis duplicata, etiam ob similes similium Figurarum partes utrobique descriptas, & reliquæ lineæ ut sh vel sg etiam in eadem ratione duplicata mutabuntur. Verum & Posterior corollarii pars ex natura Parabolæ etiam aliter facile deduci potest. Ponamus enim velocitatem esse duplo quam prius majorem, ergo quo tempore projectile prius lineam sv describeret, posterius lineam ipsius sv duplam describet; sed ob uniformitatem vis gravitatis linea vc sive sr non mutabitur: Est ergo ut vc sive sv data, ad lineam ipsius sv duplam, ita ista linea dupla ad lineam alteram, verticis latus

Vid. Fig. p. 108.

Prop. 4. *prius.*

latus rectum; nempe lateris recti ad verticem istum prius pertinentis quadruplum: Unde quarta hujus lateris recti pars, sive *sF* erit quartæ prioris lateris recti partis *sF* etiam quadrupla; & ob triangula in utroque casu similia *sFh sFh* lineæ *sh* & *sg* ipsarum *sh* & *sg* erunt etiam quadruplæ; & ita in reliquis. Est ergo in velocitate duplo majore jactus horizontalis longissimus quadruplo major, in tripla velocitate noncuplus, & ita porro in infinitum. Imo vero generaliter est affirmandum, omnes Parabolæ lineas similes similiterque positas augeri semper & minui in duplicata velocitatis auctæ vel diminutæ ratione; ut ex hactenus dictis satis constare potest.

Coroll. (11.) Longissimus jactus horizontalis cujusque Parabolæ est æqualis dimidio lateri recto ad verticem, latus rectum principale terminantem, pertinenti. Est enim in eo casu *Fs* æqualis *sh*; sed *Fs* est lateris recti ad verticem dictum pertinentis pars quarta; & *sg* ipsius *sh* dupla, unde *sg* horizontalis jactus longissimus erit lateris istius recti dimidium.

Coroll. (12.) Hinc determinare licet jactum horizontalem longissimum cuicunque velocitatis gradui congruentem. Fiat nempe ut linea *sr* unico minuto secundo vi gravitatis descripta 16$\llcorner$1 pedum Anglicorum, ad velocitatem projectilis *sv* vel *rc* pari tempore computandam, ita ista velocitas, ad numerum quartum, latus rectum verticis *s* in iisdem pedibus exhibiturum: Hujus numeri semissis longissimum jactum horizontalem dabit, uti ex superioribus est abunde manifestum. Sic si projectilis velocitas tanta sit ut minuto unico secundo pedes Anglicos mille peragrare possit, fiat ut 16$\llcorner$1: ad 1000 : ita 1000 ad numerum quartum = 62.112, latus rectum verticis *s* in pedibus Anglicis designantem. Est itaque longissimus jactus horizontalis pedum Anglicorum 31.056; ultra quem terminum nihil attingi potest, sed intra quem locum quemvis assignatum attingere sequenti corollario docebimus.

Coroll. (13.) Problema (1.) Locum quemvis in plano horizontali aſſignatum, ultra dimidium lateris recti verticis *s* non diſtantem, ex data velocitate motu projectili attingere. Sit locus ille ad pedum Anglicorum 20.000 diſtantiam, & ſit corporis projecti velocitas ea quam in poſtremo corollario poſuimus: Ob datam itaque velocitatem, datur latus rectum verticis ubi projectile motum ſuum per curvam incipiet, ejuſque proinde pars quarta, ſive linea *sF*, pedum nempe 15.528: Eſt autem ex prius dictis *sh* pedum 10.000; ex hiſce inveniatur angulus *hsF* per hanc analogiam ut *sh*, ad *sF*, ſive ut 10.000 ad 15.528, ita erit radius ad ſecantem anguli *Fsh*, per ſecantium tabulam inveniendi, graduum nempe 49°. 47′; quo angulo ex recto ablato, aut ad rectum ſuperaddito, dabitur angulorum æqualium *vsh* & *osb* ſumma; cujus dimidium *Fsv* vel *osb* angulum quem tangens *vb* cum perpendiculari *so* comprehendere debet determinabit; nempe 90° — 49°. 47′ = 40°. 13′ vel 90° + 49°. 47′ = 139° 47′; cujus anguli dimidius eſt vel 20° 6′ 30″ vel 69°. 53′. 30″; Prout nempe elevationem mediocri aut majorem aut minorem adhibendam volumus; ſi itaque globulus plumbeus velocitate aſſignata in angulis aſſignatis projiciatur, parabolam requiſitam eſt deſcripturus, & proinde locum aſſignatum petiturus, ſine ulla alia à ſcopo aberratione quam quæ ab aeris reſiſtentia perexigua ſit oritura; quæque ob parvitatem fere contemni poteſt. Problema ergo ſolutum dedimus, & data velocitate ſcopum quemvis in plano horizontali non nimium diſtantem attingere docuimus.

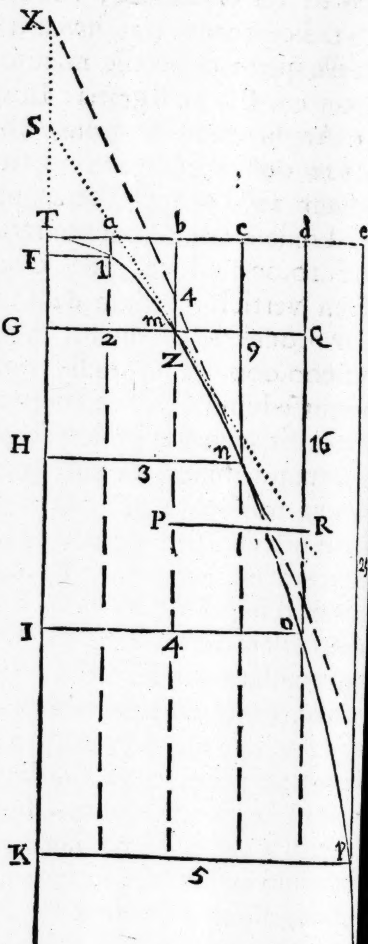
Coroll. (14.) Problema (2.) Locum quemvis in plano horizontali aſſignatum ex data elevatione motu projectili attingere; ſcilicet ex data loci diſtantia *sg* & dato angulo *hsv* velocitatem *sv* determinare. Nempe *sF* quadruplicata dabit latus rectum ad verticem *s* pertinens: Ut ergo inveniatur *sv* ducenda eſt *vc* vel *sr* ſ*f* quadruplicatam, & inde orietur rectangulum quadra

drato *vs* vel *cr* æquale; extracta itaque ex isto rectangulo radice quadratica, invenietur *vs* vel *cr*, semiordinata illa quam projectile minuto unico secundo est describturum. Exempli gratia: Esto objecti distantia *sg* pedum Anglicorum, ut prius, 20,000; & angulus datus *hsv* 69°. 53′. 30″. Erit angulus *Fsv* vel *osb* graduum 20°. 6′. 30″. & angulus *Fsh* graduum 49°. 47′. Unde è tabulis sinuum ratio lineæ *sh* ad *Fs* habebitur 10.000 ad 15.528: Unde dabitur *Fs*, & latus rectum verticis *s* pedum 62.112; quo numero in *vc* vel *sr* pedum 16⌊1 ducto, orietur numerus rectangulus 1,000,000, cujus radix quadratica est 1000, numerum pedum lineæ *sv* exhibitura. Si itaque in angulo dato ea sit primaria projectilis velocitas, ut pedes mille spatio unius minuti secundi conficere possit, scopum *g* in curva parabolica *sTg* positum attinget, nisi quatenus aeris resistentia perexigua motum projectilis aliquantulum retardare potuerit. Et eadem omnino esset computatio, si angulus *Fsv* vel *osb* graduum 69°. 53′. 30″. positus esset, uti ex ante dictis in corollario postremo facile constare potest.

Coroll. (15.) Hinc etiam ex data elevatione, aut ex data velocitate etiam locum quemvis ut *l* extra planum horizontale positum projectili attingere possumus: Si nimirum in eadem Parabola, si opus est, producta, aliud punctum ut *g* in plano horizontali positum notemus; idem enim jactus qui ad locum *g*, etiam & ad locum quemvis alium in eadem Parabola situm ut *l* omnino pertinget.

Coroll. (16.) Velocitas corporis Parabolam describentis est ubique ut recta linea à Parabolæ vertice *T* ad semiordinatæ medium ducta, sive ut Tangentis pars inter punctum contactus *m* & axem ducta, hoc est, ut secans anguli elevationis supra horizontem. Linea enim dato tempore describenda, est ut diagonalis parallelogrammi *mQRP*; cujus latus *mQ* semper datur, &

Vid. Fig. pag. prox.



mP est ipsi *bm* duplicatæ, sive ipsi *SG* æqualis: Est igitur velocitas in puncto *m*, ad velocitatem projectilem originariam in puncto *T*, ut *mR* ad *PR*, sive ut *Sm* ad *Gm*: Et ita ubique. Est itaque velocitas in puncto quovis Parabolæ *m*, ad velocitatem in puncto quovis alio *n*, ut Tangentis pars *Sm*, ad Tangentis partẽ *X*4; utraque nempe inter æquidistantes diametros *bm* & *TG* sumpta; hoc est, ut angulorum elevationis secantes. *Q.E.D.*

Coroll. (17.) Est itaque minima omnium velocitas in Parabolæ vertice *T*; & eo semper major velocitas quo distantia est ab eodem vertice major.

Coroll. (18.) Si itaque velocitates corporum in diversis angulis projectorum sint in ratione secantium angulorum elevationis supra horizontem, eandem, sive æqualem omnia Parabolam, hoc est, ejusdem vel æqualis Parabolæ partes describent; majores nempe ubi angulus elevationis est major, & minores ubi iste angulus est minor. Sin velocitates sint in alia ratione, diversas Parabolas, sive diversarum partes, ut describant, est neces-

Decemb. 4. 1704.

XII.

Lemma ad Propositionem (9^m) & sequentes.

CORPORUM in circulis gyrantium vires centripetæ causæ duplici sunt acceptæ referendæ, nimirum arcuum simul descriptorum curvaturæ, & motuum per eandem curvaturam velocitati. Nimirum cum omnis motus sit per se rectilinearis, & corpora per solam vim extraneam centripetam secundum arcus curvos circulares cieri possint, æquum est ut data velocitate curvaturam à vi sola centripeta genitam eidem vi centripetæ proportionalem statuamus. Proinde cum eo majores vires centripetæ ad eandem curvaturam generandam requirantur, quo velocitas projectionis sive motus æquabilis originarii est major, eo minores quo minor, æquum est etiam ut data curvatura vim centripetam, eidem velocitati proportionalem statuamus. Prout itaque fit in rectangulorum comparatione ut nimirum ex longitudinum & latitudinum rationibus conjunctis eorundem rationes veras determinemus, ita & in virium Centripetarum comparatione erit omnino faciendum, ut nempe ex curvaturarum & velocitatum rationibus inter se conjunctis earundem veras rationes dato quovis tempore definiamus. Esto itaque ratum, Quod virium centripetarum rationes ex curvaturarum & velocitatum rationibus conjunctis sunt ubique æstimandæ.

Scholium. Ut curvaturæ & velocitatis veras rationes recte intelligamus, Observandum est in angulis æqualibus minimis curvaturam esse ubique æqualem, si angulorum contactus subtensæ sint inter se ut radii vel distantiæ à centro; prout figurarum similium ratio omnino postulat: & si curvatura ab ea distantiarum ratione recedat, excessus aut defectus rationes pro veris curvaturæ excedentis vel deficientis rationibus in posterum computandis sunt habendæ. Velocitas autem ubique spectanda est quantum ad verum motum angularem

promovendum confert, atque adeo in linea radio ubique perpendiculari; sive, quod eodem recidit, in arcu circulari minimo est æstimanda. Ubicunque enim directio motus est aut sursum aut deorsum, quanto velocitas augetur, tanto semper curvatura minuitur, & è contra; quantitate quæ ex earundem conjunctis viribus oritur etiamnum minime mutata: quod probe est ubique observandum.

IX. Si mobilia duo æqualibus temporibus circumferentias integras inæquales *bdge* *BDGE* motu æquabili percurrant, erit vis centripeta in majori circumferentia ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri, vel etiam radii directe. *Vid. Fig. p.* 87.

Ob datam enim utrinque curvaturam, integri nimirum circuli, erit vis centripeta in majori circumferentia ad eam quæ in minori ut mobilium velocitates, hoc est, ut Circulorum circumferentiæ, vel, quod eodem redit, ut eorundem diametri vel radii directe. *Q. E. D.*

Corollarium. Si tempora periodica Corporum in circulis gyrantium æquentur, erunt tum velocitates, tum iisdem proportionales vires centripetæ inter se ut circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii directe, & vice versa, si vires centripetæ corporum in circulis gyrantium sint inter se ut circumferentiæ, diametri, vel radii directe, erunt velocitates etiam in eadem ratione, & tempora periodica erunt ubique æqualia.

Coroll. (2.) Si corporis cujusvis centralis attractivæ vires sint directe ut distantiæ ab eodem centro; corporum omnium circa illud corpus centrale in circulis gyrantium, tempora periodica erunt æqualia. Et pariter de Ellipsibus erit sentiendum, cum earum curvaturæ integræ sint circuli cujusvis curvaturæ integræ æqualis, & circumferentia inter circulorum hinc inde assumptorum circumferentias quasi intermedia. Unde ex æqualitate temporum periodicorum in circulis Ellipsibus sive majoribus sive minoribus, haud difficile erit eandem temporum periodicorum æqualitatem etiam & ellipsibus in

intermediis circa earum centra aſcribendam intelligere.

X. Si mobilia duo in iiſdem ſive æqualibus circulis gyrentur celeritatibus inæqualibus, verum utraque motu æquabili, erit vis centripeta celerioris ad vim centripetam tardioris in duplicata ratione celeritatum, ſive ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata. Ob datam enim circulorum æqualium in arcubus æqualibus curvaturam, ſimul cum velocitate creſcente creſcet etiam & curvatura in eadem ratione, & ſimul cum velocitate decreſcente decreſcet etiam & curvatura in eadem ratione: ergo vis centripeta ex curvatura & velocitate conjunctis æſtimanda erit dato tempore in ratione arcus ad arcum ſimul deſcriptum, propter velocitatis rationem, & in eadem ratione ejuſdem arcus ad eundem arcum ſimul deſcriptum, propter curvaturæ rationem: unde ex utriſque rationibus conjunctis erit, rectangulo ad quadratũ reducto, vis centripeta in duplicata arcuum ſimul deſcriptorum ratione, ſive ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata. Q.E.D.

Corollarium. Cum tempora Periodica in æqualibus circulis ſint velocitatibus reciproce proportionalia, erunt vires centripetæ in duplicata temporum periodicorum ratione reciproce, ſive ut temporum periodicorum quadrata reciproce, ita ut quo majus ſit temporis periodici quadratum, eo minor ſit vis centripeta; quo minus ſit quadratum illud, eo major ſit vis centripeta, atque ea in eadem ratione.

Coroll. (2.) Si mobilia plura circa plura corpora centralia attractiva ad eaſdem omnia diſtantias in circulis gyrentur, vires corporum centralium facile innoteſcent, cum ſint inter ſe ut temporum periodicorum quadrata reciproce: & velocitates etiam facile innoteſcent, cum ſint in ipſa temporum periodicorum ratione reciproca.

XI. Si mobilia duo in circulis inæqualibus æquali velocitate ferantur, erunt eorum vires centripetæ in ratione contraria circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum, ita ut in minori circumferentia vis centripeta major exiſtat, & in majore minor.

Ob datam enim velocitatem vires centripetæ dato tempore erunt ut curvatura arcuum æqualium, hoc eſt, ut circumferentiæ, diametri, vel radii circulorum reciproce. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Cum tempora Periodica in æquivelocibus ſint inter ſe in eadem ratione ac ſunt circumferentiæ deſcribendæ, ſi tempora Periodica mobilium diverſos circulos percurrentium ſint directe ut circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii, vires centripetæ erunt ut iſtæ circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii reciproce: & vice verſa, ſi vires centripetæ ſint ut radii vel diſtantiæ reciproce, erunt Tempora periodica ut radii directe.

Coroll. (2.) Si corporis cujuſvis centralis attractivi vires ſint reciproce ut corporum diſtantiæ à centro ſuo, ita ut quo magis appropinquant corpora, eo vis centripeta ſit major, & quo magis elongantur, vis illa ſit minor, idque in eadem ubique ratione, erunt tempora periodica corporum ad diverſas diſtantias poſitorum ut diſtantiæ illæ directe, & eorundem velocitates æquales.

XII. Si duo mobilia in circulis inæqualibus velocitate inæquali quæ ſit in ſubduplicata ratione circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ferantur, erunt vires centripetæ ubique æquales, nec in acceſſu vel receſſu ullatenus aut auctæ aut diminutæ.

Ob majorem enim velocitatem in majori circulo eamque in ſubduplicata ratione circumferentiarum augendæ ſunt in majori circulo vires centripetæ in eadem ratione. Et ob majorem curvaturam in minori circulo eamque etiam in ſubduplicata ratione circumferentiarum reciproce augendæ ſunt in minori circulo vires centripetæ in eadem ratione. Liquet igitur vires centripetas æquali ratione utrinque eſſe augendas atque adeo eſſe etiamnum utrinque æquales. *Q. E. D.*

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris quadruplus, ſive ut 4 ad 1, & ſit velocitas in majore ad velocitatem in minore in ſubduplicata

ra-

radiorum ratione, ſive ut 2 ad 1. Cum curvatura majoris ſit ad curvaturam minoris in arcubus ſimilibus æqualis, & in æqualibus reciproce ut radii, neceſſe eſt ut in arcu duplo, quem dato tempore velocitas dupla in majore deſcribet, curvatura ſit alterius dimidia: eſt ergo velocitas prioris mobilis ad velocitatem poſterioris ut 2 ad 1, & curvatura poſterioris ad curvaturam prioris ut 2 ad 1. Unde vis centripetæ quantitas in priore erit ad vis centripetæ quantitatem in poſteriore ut rectangulum ex velocitate prioris & prioris curvatura conjunctim, ſive 2×1. ad rectangulum ex velocitate poſterioris, & poſterioris curvatura conjunctim, ſive 1×2. hoc eſt in ratione æqualitatis; & ſic ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora Periodica in hoc caſu ſint inter ſe in ſubduplicata ratione circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum, erunt temporum Periodicorum quadrata inter ſe ut circumferentiæ, diametri, vel radii. Si itaque temporum periodicorum quadrata ſint inter ſe ut circumferentiæ, diametri, vel radii circulorum, erunt vires centripetæ in diſtantiis omnibus æquales, & celeritates in ratione earundem circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ſubduplicata. Et vice verſa, ſi vires centripetæ ſint in diſtantiis omnibus æquales, erunt temporum periodicorum quadrata ut diſtantiæ vel radii; & velocitates etiamnum in earundem ratione ſubduplicata.

Coroll. (2.) Si Corporis cujuſvis centralis attractivi vires centripetæ ſint in omnibus diſtantiis plane eædem, erunt velocitates in ſubduplicata ratione diſtantiarum; & temporum periodicorum quadrata inter ſe ut diſtantiæ illæ, vel diametri, vel circumferentiæ.

XIII. Si duo mobilia in circulis inæqualibus velocitate inæquali quæ ſit in ſubduplicata circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ratione reciproce, ita ut in majori circulo velocitas ſit minor, & in minori ſit major, idque in ſubduplicata eorundem radiorum ratione reciproce, erunt vires centripetæ reciproce ut radiorum, vel diſtantiarum quadrata.

Ob

Ob minorem enim in majori circulo curvaturam eamque in sesquiplicata ratione radiorum reciproca; & ob minorem etiam celeritatem in majori circulo, eamque in subduplicata ratione radiorum etiam reciproca, erunt vires centripetæ ex rationibus hisce conjunctis derivandæ in ratione radiorum reciproca duplicata, sive reciproce, ut quadrata radiorum. *Q. E. D.*

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris noncuplus, sive ut 9 ad 1. & sit velocitas in majore ad velocitatem in minore in subduplicata ratione radiorum reciproce, sive ut 1 ad 3. Cum curvatura majoris sit ad curvaturam minoris, ut prius, in arcubus similibus æqualis, & in æqualibus reciproce ut radii, necesse est ut in arcu alterius partem solum tertiam adæquante, quem dato tempore velocitatis alterius triens solum describet, in majore sit alterius pars tantum vigesima septima sive ut 1 ad 27. Est ergo velocitas in circulo majore ad velocitatem in minore ut 1 ad 3, & curvatura in majore ad curvaturam in minore ut 1 ad 27. Unde vis centripetæ quantitas in majore erit ad ejusdem quantitatem in minore ut rectangulum ex velocitate & curvatura in majore conjunctim, sive $1 \times 1 = 1$. ad rectangulum ex velocitate & curvatura in minore conjunctim, sive $3 \times 27. = 81$. hoc est, ut radii minoris quadratum $= 1$. ad majoris quadratum $= 81$. Et sic ubique. Erunt etiam tempora periodica inter se ut 27, ad 1, hoc est, in radiorum 9 ad 1 ratione sesquialtera; est enim 27, inter 9 & 81, media geometrice proportionalis; atque adeo ratio 27 ad 1 continet rationem 9 ad 1 & ejusdem 81 ad 9 rationem dimidiatam, sive subduplicatam 81 ad 27. [1 : 3 : 9 : 27 : 81 : ∴] & sic etiam ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora periodica in hoc casu sint inter se in sesquiplicata ratione radiorum, erunt temporum periodicorum quadrata inter se ut cubi radiorum. Si itaque temporum periodicorum quadrata sint inter se ut cubi radiorum, erunt vires centripetæ inter se ut

ut radiorum quadrata reciproce, & velocitates in ſub-duplicata ratione radiorum reciproca. Et vice verſa, ſi vires centripetæ ſint inverſe ut radiorum vel diſtantiarum quadrata, erunt temporum periodicorum quadrata inter ſe ut ſunt cubi radiorum; & velocitates etiamnum in radiorum ratione ſubduplicata reciproce.

Coroll. (2.) Si corporis cujuſvis centralis attractivi vires centripetæ ſint in diverſis diſtantiis à centro ſuo ut diſtantiarum iſtarum quadrata reciproce, erunt corporum in diverſis diſtantiis gyrantium velocitates in ſubduplicata diſtantiarum ratione reciproce; & temporum periodicorum ratio duplicata erit rationi diſtantiarum triplicatæ æqualis, ſive erunt temporum periodicorum quadrata inter ſe ut ſunt cubi radiorum.

Coroll. (3.) Si motus ſit in Ellipſi diſtantia inter maximam & minimam intermedia ſumatur; & tum etiam in Ellipſibus erunt temporum periodicorum quadrata ut radiorum Cubi inter ſe æque ac in Circulis.

XIV. Si duo mobilia in circulis inæqualibus inæquali celeritate, eaque in radiorum ratione reciproca ferantur, ita ut quo major eſt radius, diameter, aut circumferentia, eo minor ſit velocitas; & quo minor, eo major ſit velocitas, eaque in reciproca radiorum ratione, erunt vires centripetæ ut cubi radiorum reciproce.

Ob minorem enim in circulo majori celeritatem, eamque in ipſa ratione radiorum reciproca; & ob minorem etiam in circulo curvaturam, eamque in duplicata ratione radiorum reciproca, erunt vires centripetæ ex conjunctis iſtis rationibus derivandæ in ratione Radiorum reciproca triplicata, ſive ut cubi radiorum.

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris duplus, ſive ut 2 ad 1. Et ſit velocitas in majore ad velocitatem in minore reciproce ut radii, ſive ut 1 ad 2. Erit dato tempore curvatura majoris ad curvaturam minoris ut 1 ad 4. Eſt ergo velocitas in minore circulo ad velocitatem in majore ut 2 ad 1, & curvatura in minore ad curvaturam in majore

ut

ut 4 ad 1. Unde vis centripetæ quantitas in minore erit ad vis centripetæ quantitatem in majore ut rectangulum 2 × 4 = 8, ad rectangulum 1 × 1 = 1, sive ut radiorum Cubi reciproce. Et sic ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora periodica sint in hoc casu in duplicata ratione radiorum, si temporum periodicorum quadrata sint inter se ut quadrato quadrata radiorum, sive, quod perinde est, si ipsa tempora periodica sint inter se ut radiorum quadrata, erunt vires centripetæ inter se ut radiorum vel distantiarum Cubi inverse, & velocitates inverse ut radii. Et vice versa, si vires centripetæ sint inverse ut distantiarum Cubi, erunt tempora periodica inter se ut radiorum quadrata, & velocitates etiamnum ut ipsi radii inverse.

Coroll. (2.) Si corporis cujusvis centralis attractivi vires centripetæ sint in diversis distantiis à centro suo ut distantiarum istarum Cubi reciproce, erunt corporum in diversis distantiis gyrantium velocitates in ipsa distantiarum ratione reciproca; & tempora periodica in duplicata istarum distantiarum ratione.

Coroll. (3.) Eadem omnia de temporibus velocitatibus & viribus centripetis quibus corpora similes curvarum quarumcunque similium, centraque similiter posita habentium partes describunt, consequuntur ex præcedentium ad circulos speciatim applicatorum demonstrationibus ad casus hosce applicandis.

Scholium. Cum Propositionis 13. casus in corporibus cœlestibus obtineat, nempe quod temporum periodicorum quadrata sunt inter se ubique ut distantiarum Cubi, & quod proinde vires centripetæ sunt ut distantiarum quadrata reciproce, & velocitates in distantiarum istarum ratione subduplicata reciproce; cum inquam hic casus in Systemate mundano isque solus ubique obtineat, uti seorsim colligerunt etiam nostrates Wrennus, Hookius & Halleius, & jam est apud Astronomos receptissimum, idem casus longe nobilissimus in sequentibus erit fusius & diligentius exponendus, dum reliquorum consequentiæ

levi

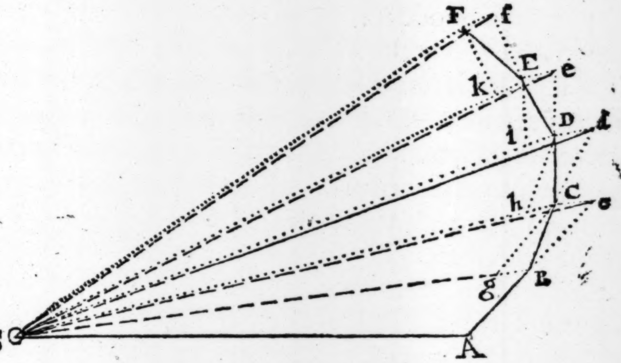
evi dumtaxat opera in tranſcurſu attinguntur. Atque
æc impræſentiarum hactenus. Reliqua in Terminum
roxime futurum reſervabimus.

Decemb. 11. 1704.

XIII.

XV. AREÆ quas Corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtunt, & ſunt temporibus proportionales, & dato tempore ubique æquales: motus nempe velocitate in diſtantia minore, & tarditate in diſtantia majore arearum deſcriptionem ita moderante, ut ex variis iſtis diſtantiis dato tempore nulla ſpatiorum percurſorum differentia unquam oriatur.

Dividatur enim tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita, ſive motu projectili rectam lineam quamvis *AB*. Idem corpus ſecunda æquali temporis parte, ſi nihil impediret, & nulla alia vis



urgeret recta ad *c* pergeret, deſcribens lineam *Bc* ipſi *AB* æqualem, adeo ut radiis ad centrum *S* ductis confectæ forent æquales areæ *ASB*. *BSc*. Verum ubi corpus ad punctum *B* venit agat vis centripeta, ſive attractio ſit ſive preſſio qualiſcunque ad centrum *S* tendens, impulſu unico, qui ſit ad motum projectilem ut linea quæ-

quævis *Bg* ad lineam *Bc*, impulſus hic novus efficiet ut corpus à recta *Bc* deflectat & in linea alia pergat, * parallelogrammi nempe *BgCc* diagonali *BC*, ita ut completa ſecunda temporis parte æquali corpus ad punctum *C* ſit inveniendum, in eodem plano cum triangulo *ASB*. junge *SC*. & area radio à corpore ad centrum ducto deſcripta, hoc eſt, triangulum *SBC* æquabitur æreæ prioris, hoc eſt, † triangulo *SBc*, atque adeo triangulo primo *SAB* cui nempe ex prius dictis æquale erat triangulum *SBc*. Simili argumento tertia æquali temporis parte corpus a *C* ad *d* vi projectili (quæ ſemel parta uſque perſeverat) pertingeret, ita ut linea *Cd* deſcribenda lineæ *CB* nuperrime deſcriptæ foret æqualis. Sed ſi vis centripeta quæcunque priore aut minor aut major iterum agat ad punctum *C*, Corpus in fine tertii temporis reperietur alicubi in linea *Dd* ipſi *SC* parallela, & per parallelogrammi cujuſdam *hDdC* diagonalem *CD* ad punctum quoddam *D* pertinget, adeo ut triangulum *SDC* triangulo *SdC*, atque adeo reliquis triangulis *SCB SBA* inter ſe æqualibus ſit æquale; pari jure, ſi vis centripeta ſucceſſive agat in *D.E.F.* faciens ut corpus ſingulis temporis particulis æqualibus ſingulas rectas diagonales deſcribat, jacebunt omnes hæ rectæ lineæ in eodem plano, & triangula *SED SFE* prioribus æqualia deſcribentur. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & arearum ſummæ quævis *SADS SAFS* ſunt inter ſe ut deſcriptionum tempora. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter, polygoni lateribus in curvam deſinentibus, *ADF* erit linea curva, & ob vim centripetam jam continuam & indeſinenter agentem, corpus perpetuo retrahetur à curvæ tangentibus, & areæ pari ac prius jure etiamnum in plano immobili deſcriptæ erunt ſemper temporibus proportionales. *Q.E.D.*

* *Per Leg. Mot. 22. prius.*

† I. 37. *Elem.*

Coroll.

Coroll. (1.) Erit itaque velocitas corporis circa gyrationis centrum, secundum lineam radio perpendicularem æstimata, in ratione distantiarum reciproca; alias enim arearum æqualitas nullo modo observari potest.

Coroll. (2.) Erit quoque velocitas corporis angularis circa virium centrum in duplicata distantiarum ratione reciproca. Nam cum vera velocitas sit in simplici distantiarum ratione reciproca, ut jam vidimus, & centri distantia eo major quo motus est tardior, & in eadem quoque ratione, liquet velocitatem angularem quoad virium centrum esse in duplicata distantiæ ratione reciproca.

Coroll. (3.) Ubi positio tangentis est ad centri distantiam sive radium perpendicularis, & motus projectilis velocitas vim centrifugam corporis centralis vi centripetæ exacte proportionalem vel correspondentem efficit, corpus neque ad centrum appropinquabit, neque ab eodem recedet, sed motu circulari circa centrum illud perpetuo feretur.

Coroll. (4.) Ubi autem positio tangentis est ad radium obliqua, licet motus projectilis velocitas sit vi centripetæ proportionata & correspondens, vis illa centripeta motum vel minimum descendentem aliquantulum conspirando adaugebit; & vel minimum ascendentem aliquantulum sese opponendo diminuet, donec motus adauctus vim centripetam tandem exuperet, & corpus prius descendens ascendat iterum; vel donec motus diminutus vi centripetæ tandem cedat, & corpus prius ascendens descendat iterum.

Coroll. (5.) Ex hujusmodi circumstantiis motus corporum circa centrum quodvis in Ellipsibus gyrantium oriri debent. Nam etsi ad axem minorem Ellipseωs, corpore centrali focum occupante; aut ad diametrum mediocrem eodem centrum occupante Corpus inter revolvendum supponatur situm, & velocitas motus projectilis vi centripetæ ad amussim eo loci correspondere etiam supponatur, tamen ob tangentium in iisdem locis positionem obliquam motus non circularis sed ellipticus orietur.

orietur. Corpore nempe inter deſcendendum vires quibus poſtea aſcendat paulatim acquirente; & inter aſcendendum vires quibus prius aſcenderat paulatim amittente, donec ſuperante vi centripeta ad deſcendendum tandem cogatur. Atque ita perpetuo. Unde patet quo pacto ex eodem motu per obliquam lineam impreſſo oriatur motus ellipticus; dum idem motus per lineam perpendicularem impreſſus circuitum omnino circularem genuiſſet.

Coroll. (6.) In mediis non reſiſtentibus & in loco vacuo ſi areæ deſcriptæ non ſint deſcribendi temporibus proportionales vires non tendunt ad concurſum radiorum. Nam ſi eo tenderent areæ iſtæ neceſſario eſſent temporibus proportionales, contra hypotheſin.

Coroll. (7.) In mediis omnibus ſi arearum deſcriptio acceleretur, vires non tendunt ad concurſum radiorum, ſed cum motu projectili conſpirant magis: ſi arearum deſcriptio retardetur, plus nimirum quam ex medii reſiſtentia, vires non tendunt ad concurſum radiorum, ſed motui projectili opponuntur magis.

XVI. Corpus omne quod movetur in linea curva, & radio ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, ducto deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. (1.) Ob æqualitatem enim triangulorum *ScB* *SCB* eadem baſi *SB* deſcriptorum puncta *C* & *c* erunt * in linea *Cc* baſi parallela; atque adeo figura *BcCg* erit parallelogrammum, cujus *Bc* & *Bg* ſunt latera vires exponentia, & *BC* diagonalis; urgetur itaque Corpus ad *B* poſitum vi *Bg* tendente ad *S* centrum virium; atque ita pariter in punctis omnibus *C. D. E. F.* *Q. E. D.*

Vid. Fig. p. 125.
* I. 39. *Elem.*

Cas. (2.) Et perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam; ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo centrali *S* uniformiter in directum. Unde prioris caſus demonſtratio in hoc etiam valebit.

Scho

Scholium. Corpus urgeri poteſt à vi centripeta ex viribus pluribus compoſita, (uti exempli gratia vis gravium in terræ centrum ex viribus in omnes terræ particulas tendentibus compoſita eſt, ut poſtea conſtabit;) in hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus eſt compoſita, cum ad unam eſt reducta, tendit ad centrum virium.

Coroll. (1.) Cum itaque in planetarum primariorum ſyſtemate Areæ radiis ad Solis centrum ductis ſint ſemper temporibus proportionales, uti Aſtronomis eſt notiſſimum, urgentur Planetæ vi perpetua ad Solis centrum tendente: neque aliter de ſecundariis circa primarios ſuos, Saturnum nempe, Jovem, & Terram eſt ratiocinandum.

Coroll. (2.) Sicut velocitas diverſorum corporum circa centrum virium, ubi vires illæ ſunt ut quadrata diſtantiarum inverſe, eſt in diverſis circulis in ſubduplicata ratione diſtantiarum inverſa, uti olim demonſtravimus; ita ex hac & præcedenti propoſitione ſequitur, quod velocitas ejuſdem corporis orbitam quamvis eccentricam deſcribentis, in diverſis ſuis à centro diſtantiis poſiti, qualicunque virium centripetarum lege, eſt ut ipſa diſtantia inverſe, ſi nempe velocitas iſta in arcu circulari aut in linea radio perpendiculari, ut prius æſtimetur: cujus diverſæ velocitatis rationis cauſa eſt quod in diverſis circulis areæ in iſto caſu non ſint utrinque æquales, ſed pro magnitudine diſtantiæ majores & eadem magnitudinis ratione etiam majores; cum tamen in ejuſdem corporis revolutione æqualitas arearum velocitatem diſtantiæ reciproce proportionalem omnino exigat. Sic ſane ſi Planetæ duo in diverſis circulis circa Solem revolverent, quorum circulorum Radii ratione quadrupla alter alterum excederet, Planeta remotior velocitate alterius tantum dupla ferretur: ſin idem Planeta per Ellipſin valde excentricam curſus ſuos peragens nunc ad diſtantiam majorem nunc minorem, eamque, ut prius, in ratione quadrupla excedentem & defici-

entem alterius vicibus collocetur, erit velocitas in ipſi distantiarum ratione reciproca, & in diſtantia minore alterius ad amuſſim quadrupla: & ita in diſtantiis quibuſcunque. Quod in Syſtemate quovis Planetario probe meminiſſe oportebit.

XVII. Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto, deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus alterum urgetur. Si enim primo quieſcant planum & centrum virium in iſto plano, erunt areæ temporibus proportionales; & ſi eadem celeritate corpora utraque per lineas parallelas accelerentur manebunt areæ temporibus etiamnum proportionales. Unde cum ex hypotheſi maneant areæ temporibus proportionales, manebit & vis centripeta earum cauſa, & vis acceleratrix ubique eadem communis celeritatis cauſa manebit.

Coroll. (1.) Si corpus quodvis radio ad alterum ducto deſcribat areas temporibus proportionales, atque de vi tota, ſive ſimplici, ſive ex pluribus viribus compoſita, qua corpus prius urgetur ſubducatur vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur, vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum tanquam ad centrum.

Coroll. (2.) Et ſi areæ illæ ſint temporibus quam proxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quam proxime.

Coroll. (3.) Et vice verſa, ſi vis reliqua tendat quam proxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quam proxime proportionales.

Coroll. (4.) Si corpus, radio ad alterum corpus ducto, deſcribat areas quæ cum temporibus collatæ ſunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quieſcat vel moveatur uniformiter in directum, actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis vel nulla est vel miſcetur & perturbatur ab aliis viribus. Et

tota ex omnibus, si plures sint, composita ad aliud sive immobile sive mobile centrum dirigetur, circum quod æquabilis erit arearum descriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunque movetur, si modo vis centripeta sumatur ea quæ restat post subductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

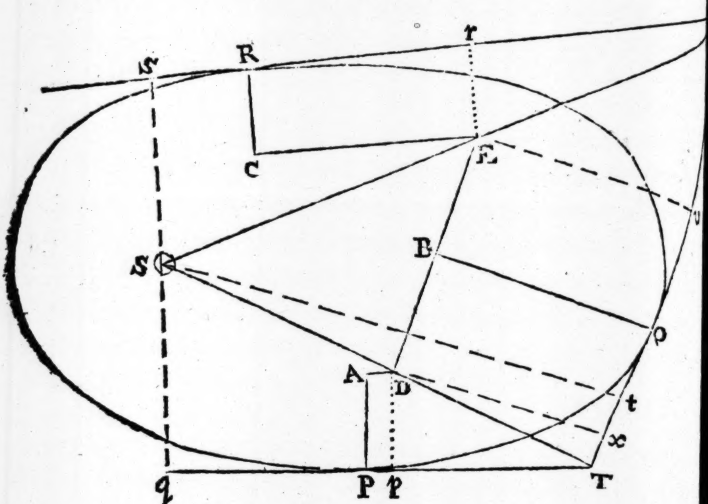
Scholium (1.) Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est Centri quod vis illa respicit qua corpus afficitur, corpus autem a vi ad hoc centrum tendente retinetur in curvilinea sua orbita: Et quoniam motus omnis circularis seu in orbem rediens recte dicitur circa centrum illud fieri cujus vi corpus de motu rectilineo retrahitur, & in orbita sua perpetuo retinetur: In sequentibus usurpabimus æquabilem illam arearum descriptionem, ut indicem Centri, circum quod motus omnis circularis, seu in orbem rediens in spatiis liberis peragitur.

Scholium (2.) Spectat propositio hæc 17ª & ejusdem corollaria ad verum mundi systema intelligendum. Quamquam enim motus omnes planetarii ex motu per tangentes projectili semel impresso, & vi centripeta perpetuo urgente sint derivandi, attamen centra illa ad quæ vires centripetæ tendunt & ipsa moventur una cum corporibus circumvolventibus. Sic sane circulationes Circumsaturniorum, Circumjovialium, & Lunæ ex motu projectili singulis semel impresso, & ex vi centripeta in Saturni, Jovis & Telluris centra respective tendente oriuntur; licet ipsa interea centralia illa corpora cum satellitio suo universo moveantur una circa Solem, commune omnium planetarum primariorum centrum.

XVIII. *Problema.* Data tribus quibuscunque in locis velocitate qua corpus figuram datam, viribus ad commune aliquod punctum ceu centrum tendentibus, describit centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant tres rectæ *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P. Q. R.* concurrentes in *T*, & *V*.

Ad tangentes in punctis contractuum erigantur perpendicula *PA. QB. RC.* velocitatibus corporis in punctis illis *P. Q. R.* a quibus eriguntur reciproce proportionalia. Id eſt, ita ut ſit *PA*, ad *QB*, ut velocitas in *Q*, ad velocitatem in *P*. & *QB*, ad *RC*, ut velocitas in *R*, ad velocitatem in *Q*. Ad perpendiculorum terminos *A. B. C.* ad angulos rectos ſeu tangentibus parallelæ ducantur *AD. DBE. EC.* concurrentes in *D* & *E*.



Ducantur *TD* & *VE* in puncto *S* ſe interſecantes. A puncto *E* ſint *Er* & *Ev* perpendiculis *CR* & *BQ* reſpective parallelæ. Et pariter a puncto *D* ſint *Dp* & *Dx* perpendiculis *AP* & *BQ* reſpective parallelæ. Denique a puncto *S* ſint *Ss. St. Sq.* iiſdem perpendiculis reſpective parallelæ ſeu tangentibus perpendiculares. punctum *S* erit centrum quæſitum.

Cum enim corpus revolvens, & in punctis *P* & *Q* ſucceſſive, poſitum radiis ad centrum virium ductis æquali tempore æquales areas, ſeu triangula minima æqualia ſemper deſcribat; cum etiam triangula illa ſimul deſcripta ſint ut velocitates

Per Prop. 15. *prius.*
Scholl. poſt I, 41. *Elem.*

tes ſive lineæ ſimul deſcriptæ in P & Q ductæ reſpective in perpendicula à centro in tangentes PT QT dimiſſa. Erunt itaque perpendicula illa ut velocitates reciproce, adeoque ut perpendicula Dp & Dx directe. Sed propter triangula ſimilia TDx TSt & TDp TSq. Ut eſt Dp ad Dx, ita eſt perpendiculum Sq ad perpendiculum St. Et pari cum proribus jure erit ut Ev ad Er, ita perpendiculum St ad perpendiculum Ss. Et cum hoc in ſolo linearum TD & VE concurſu S utrinque poteſt eſſe verum, quod neceſſarium eſt in hoc caſu, liquet punctum S eſſe virium centripetarum centrum. *Q. E. D.*

Jan. 29°. 170$\frac{4}{5}$.

XIV.

XIX. SI Corpus moveatur in Ellipſi circa ejuſdem centrum, erit vis centripeta directe ut diſtantia corporis ab eodem centro. Eſt enim curvatura ubique in arcubus ſimilibus in quadruplicata ratione diſtantiæ: velocitas autem in ejuſdem diſtantiæ ratione ſimplici inverſe. Unde curvatura dato tempore deſcripta erit in duplicata ratione diſtantiæ, & velocitas in ratione ſimplici diſtantiæ inverſe, & vis centripeta, exceſſu rationis curvaturæ ſupra velocitatis rationem in hoc caſu æſtimanda, erit directe ut diſtantia. *Q. E. D.*

Corollarium. Si Ellipſis centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac parabola, & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema Galilæi, à nobis alia methodo demonſtratum ſupra. Et ſi coni ſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus circa Centrum in hujus perimetro, vi centripeta in cen- *Prop.* 8.

 trifugam

trifugam versa, & vi illa centrifuga majori existente in minori distantia, minori vero in majori distantia; uti virium adeo contrariarum ratio omnino exigit.

Coroll. (2.) Si vis centripeta corporis cujusvis attractivi sit directe ut distantia, ita ut in majori distantia attractio sit in eadem ratione etiam major, & in minori minor, Corpus movebitur in Ellipsi circa corpus centrale in ipso ellipsecos centro positum, aut forte in circulo in quem ellipsis migrare potest: scilicet pro tangentium situ, de quo prius, corpus aut in circulo aut in ellipsi movebitur.

Coroll. 3, 4 *&* 5. *post Prop.* 15.

Coroll. (3.) Et æqualia erunt revolutionum in figuris universis circa centrum idem factarum periodica tempora; uti olim quoque ostendimus.

Coroll. 2. *Prop.* 9.

XX. Si corpus moveatur in spirali, secante radios omnes in eodem angulo, vis centripeta erit reciproce ut cubus distantiæ a spiralis centro. Est enim inharum spiralium diversis partibus curvatura arcuum similium æqualis, æqualium vero reciproce ut distantia. Sed dum corpora in spiralibus revolvunt erit ubique celeritas reciproce ut distantia, & inde etiam curvatura, dato tempore, reciproce in duplicata distantiæ ratione. Ergo vis centripeta ex curvaturæ & celeritatis rationibus conjunctis oriunda erit in triplicata distantiæ ratione reciproce, sive reciprocè ut cubus distantiæ.

Corollarium. Si corporis cujusvis attractivi vires sint in triplicata distantiarum à centro suo ratione reciproce, corpora omnia quorum motuum projectilium directiones non sunt ad radios perpendiculares cum velocitate quacunque exeuntia movebuntur in spirali, secante radios omnes in angulo dato: & si corpus primum ascendat, ascendet in infinitum; si descendat descendet ad centrum, temporis spatio ex areæ spiralis quantitate facile inveniendo.

Scholium. Si qua esset curva regularis cujus curvatura à quovis puncto centrali esset in duplicata distantiæ

antiæ ratione directe, corpus quodvis in ea revolveret, si modo vires centripetæ ad punctum centrale essent inter se in ipsa distantiarum ratione reciproca. Nam si curvatura in æqualibus angulis sit ex hypothesi in duplicata distantiæ ratione directe, erit curvatura dato tempore semper sibi æqualis in distantiis omnibus; & cum velocitas sit semper ut distantia reciproce, erunt vires centripetæ, ex curvatura & velocitate conjunctis æstimandæ, ut distantia reciproce, & corpus in ista curva movebitur. *Q.E.D.*

Sic etiam, si qua esset curva regularis cujus curvatura a quovis puncto centrali esset in triplicata distantiæ ratione directe, quodvis corpus in ea revolveret, si modo vires centripetæ ad punctum centrale essent in omnibus distantiis æquales. Nam si curvatura in æqualibus angulis sit ex hypothesi in triplicata ratione distantiæ directe, erit curvatura dato tempore semper ut distantia directe: & cum velocitas sit semper ut distantia reciproce, vires centripetæ ob æqualitatem rationum directæ & reciprocæ erunt ubique æquales, & corpus in ista curva movebitur.

XXI. Si corpus moveatur in Ellipsi circa ejusdem focum, vis centripeta erit ubique in duplicata ratione distantiæ ab eodem foco reciproce.

Est enim uti olim notavimus in ellipsium & parabolarum & hyperbolarum partibus diversis quoad focum curvatura ubique in arcubus similibus directe ut distantia, & in partibus æqualibus semper æqualis. Est autem velocitas ubique in distantiæ ratione reciproca. Ergo in arcubus simul descriptis curvatura est reciproce ut distantia à foco, atque in eadem ratione reciproca est etiam celeritas: unde vis centripeta ex curvaturæ & celeritatis rationibus conjunctis æstimanda erit in duplicata ratione distantiæ à foco reciproce. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Si corporis cujusvis attractivi vires sint in duplicata ratione distantiarum à centro suo reciproce, corpora omnia, saltem quorum motuum projectilium directio-

nes non ſunt ad radios perpendiculares, cum quacunque etiam motus velocitate, movebuntur in Ellipſibus, quarum focos, hoc eſt, focorum alterum corpus centrale occupabit, niſi motuum projectilium tanta ſit velocitas ut Ellipſes in Parabolas aut etiam hyperbolas convertere poſſit.

Coroll. (2.) Si corpus ex lege vis centripetæ hic aſſignata in Ellipſi circa focorum alterum gyretur, erit tempus periodicum corporis in Ellipſi moventis, ad tempus periodicum corporis in circulo, cujus radius eſt inter diſtantiam maximam & minimam intermedius, ſive ſemiaxi majori æqualis in ratione æqualitatis. Cum enim curvatura abſoluta Ellipſeωs integra ſit circuli curvaturæ æqualis, & ſumma velocitatum abſolutarum in paribus arcubus ſupra & infra mediocrem diſtantiam ſit ſemper ob motum in æquali arcu æqualiter mutatum velocitati in circulo mediocri æqualis, liquet vim centripetam eſſe æqualem, & proinde tempora periodica quoque eſſe inter ſe æqualia. Vel ſic potius demonſtrabimus. Ponatur eadem in mediocri diſtantia velocitas abſoluta, quæ eſt in circulo eadem ſemidiametro deſcripto, erit tum ex Conicis angulus ſive area deſcripta in circulo, ad angulum ſive aream in Ellipſi ſimul deſcriptam, ut ſemiaxis major, ad minorem: & in eadem quoque ratione, ex Conicis, eſt area integra circuli ad aream integram Ellipſeωs. Unde propter æquabilem arearum deſcriptionem utrinque, erunt & utrinque tempora periodica inter ſe æqualia.

Coroll. (3.) Sunt ergo tempora periodica in Ellipſibus inter ſe in ratione axium majorum ſequialtera, æque ac in circulis.

Coroll. (4.) Proinde dato axe majore, datur una tempus periodicum.

Coroll. (5.) Cum eadem ſit curvaturæ & celeritatis ratio in Parabola atque Hyperbola reſpectu focorum quam modo in Ellipſi obſervavimus, corpus pari ac prius jure ex viribus in ratione diſtantiæ duplicata reciproce

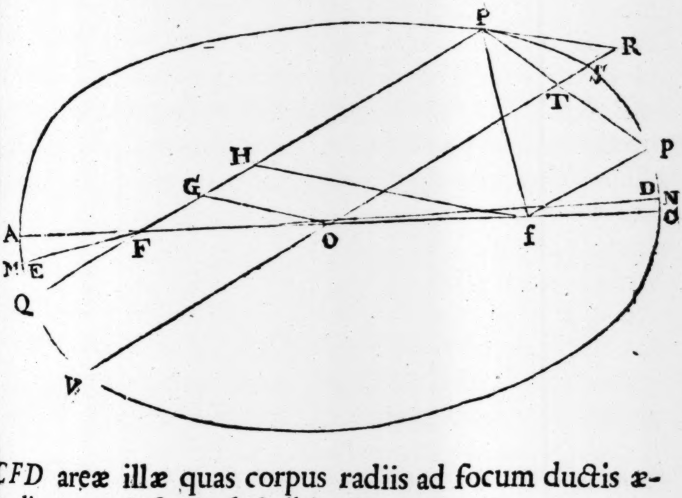
mutatis

mutatis movebitur in Parabola aut Hyperbola circa focum.

Scholium. Peractis jam faciliori methodo fundamentalium Newtoni Propositionum demonstrationibus; liceat mihi, coronidis loco, aliam Propositionis postremæ omnium longe nobilissimæ, & ad Systema mundanum maxime accommodatæ demonstrationem, ad rigorem geometricum magis compositam, qualem nempe eam è charta MS Ipsius Newtoni olim acceperam, hic loci attexere.

Propositio. Si corpus quodvis versus Ellipseωs focum attrahatur, & si attractionis quantitas & ratio sit hujusmodi ut corpus in perimetro elliptica revolvere efficiant, erit attractio in distantia minima, ad attractionem in distantia maxima, ad majorem nempe axem utraque, ut quadrata distantiarum corporis in istis punctis ab Ellipseωs foco reciproce.

Sit *AECD* Ellipsis: *A* & *C* axis majoris extremitates: *F* focus iste quo tendit vis centripeta: & *AFE*



CFD areæ illæ quas corpus radiis ad focum ductis æquali temporis spatio describit. Sunt autem areæ illæ inter se æquales, utpote temporibus æqualibus proportionales.

Prop. 15. prius.

Hoc

Hoc est, rectangula $\frac{1}{2}$ $AF \times AE$ & $\frac{1}{2}$ $FC \times DC$, sunt inter se æqualia; ex hypothesi nimirum quod arcus AE & CD adeo exigui sumuntur ut pro lineis rectis tuto haberi possint. Ergo AE est ad CD ut FC ad FA. Supponamus jam lineas rectas AM & CN ellipsin in punctis A & C tangere, & lineolas EM & DN [in figura supplendas] esse à punctis E & D in tangentes illas perpendiculares. Quoniam curvatura Ellipsium (si nempe eandem in genere spectemus, & in arcubus æqualibus quoad ejusdem centrum) sit ad utramque extremitatem æqualis, Perpendicula illa EM & DN erunt inter se ut arcuum AE & CD quadrata. Est ergo EM ad DN ut FC quadratum, ad FA quadratum. Eodem autem tempore quo corpus ex attractionis vi describet arcus ellipticos AE & CD, ab A ad E, & à C ad D; idem absque illa attractione tangentes AM & CN arcubus æquales descripsisset. Sunt ergo attractionum vires quæ corpus è tangentibus ad curvam, nempe ab M ad E, & ab N ad D trahunt, & inter se ut lineolæ illæ, angulorum contactus subtendentes, eodem tempore genitæ ME & ND. Est ergo Attractio in puncto A, ad attractionem in puncto C, ut lineola ME, ad lineolam ND. Hoc est, ex jam demonstratis, ut FC quadratum ad FA quadratum. Sive ut distantiarum quadrata reciproce. Q.E.D.

Schol. post. I. 41. Elem.

VI. 14. Elem.

Coroll. 4. Prop. 2. supra.

Hæc demonstratio solas respicit ellipsium extremitates; quæ sequuntur eandem propositionem quibuscunque ellipsium partibus applicabunt.

Lemma. Si linea recta in puncto quocunque ellipsin tangat, & si linea tangenti isti parallela ducatur per Ellipseωs centrum, quæ lineam tertiam per contactus punctum & focorum alterutrum ductam intersecet, pars lineæ istius tertiæ inter contactum & intersectionem posita erit axis majoris semissi æqualis.

Sit $APCQ$ Ellipsis: AC axis major: O centrum:

Ff foci: P contactus punctum: OG linea tangenti parallela: & PG lineæ Vid. Fig. p. 137. FP pars inter contactum & tangenti parallelam. Dico quod PG est ipsi CO, sive axis majoris semissi æqualis.

Junge enim puncta Pf: & duc lineam fH ipsi OG parallelam. Et quoniam lineæ Ff & FH bisectæ sunt in punctis O & G, erit AC summæ linearum PF & Pf, hoc est, summæ linearum PF & ex Conicis PH, sive duplæ lineæ PG æqualis. Est ergo semissis AC, hoc est CO, lineæ PG æqualis. *Q. E. D.*

Lemma Alterum. Linea recta quævis per Ellipseωs focum alterutrum ad peripheriam ducta, se habet ad Diametrum Ellipseωs lineæ eidem parallelam, ut eadem Diameter se habet ad majorem Ellipseωs axem.

Sit $APCQ$ Ellipsis: AC axis major: $F. f.$ foci: O centrum: PQ linea quævis per focum F ducta: VOS diameter Ellipseωs lineæ PQ parallela. Erunt $PQ.\ VS.\ AC$ ∺. Vid. Fig. p. 237. Ducatur enim fp ipsi QFP parallela; quæ etiam Ellipseωs perimetrum secet in puncto p. puncta $P.\ p$ junge linea Pp, lineam VS in puncto T secante. Duc lineam PR, quæ nempe Ellipsin in puncto P contingat, & diametrum VS productam in R secet. Erunt jam ex conicis $OT : OS : OR$ ∺. Est autem OT ipsarum FP & Fp, sive FP & FQ semisumma: atque adeo OT duplicata ipsi PQ est æqualis. Est etiam OS duplicata ipsi VS æqualis. Et per Lemma jam demonstratum OR sive PG duplicata ipsi AC æqualis est. Quocirca $PQ.\ VS.\ AC.$ ∺. *Q.E.D.*

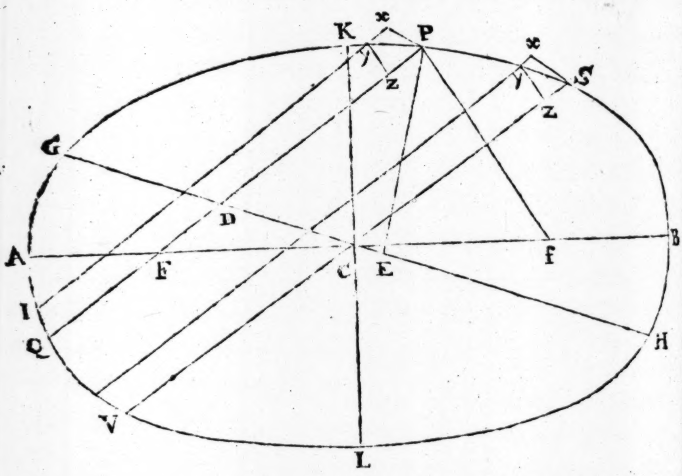
Corollarium. $AC \times PQ = VSq = 4OSq.$

Lemma Tertium. Si ab alterutro Ellipseωs foco ad quodvis in ejus perimetro punctum ducatur recta linea FP: & ad punctum P Ellipseωs tangens Px; Et si isti contactus angulo subtendatur lineola xy lineæ PQ parallela; rectangulum subtensæ lineolæ, & ejusdem lineæ ad remotiorem perimetri partem productæ, est ad rectangulum majoris Ellipseωs axis, & primæ lineæ

ad

ad Ellipseωs etiam perimetrum productæ, ut distantiæ perpendicularis inter subtensam lineolam & lineam primam quadratum, ad axis Ellipseωs minoris quadratum.

Esto *AKBL* Ellipsis: *AB* axis major: *KL* axis minor: *C* centrum: *F. f* foci: *P* punctum quodvis in perimetro designatum: *FP* linea prima, per focum nempe *F* ad *P* ducta: *PQ* linea eadem ad Ellipsin producta: *Px* tangens: *xy* lineola angulo contactus subtensa: *xI* eadem subtensa ad remotiorem perimetri partem producta: *yz* distantia perpendicularis subtensæ & lineæ primæ. Dico quod rectangulum *yxI*, est ad rectangulum *AB* × *PQ*, ut est *yz* quadratum,



ad *KL* quadratum. Esto enim *VS* Ellipseωs diameter lineæ primæ parallela, & *GH* diameter altera tangenti *Sx* parallela, sive diameter diametro priori conjugata. Erit tum ex Conicis rectangulum *yxI*, ad *Px* quadratum, sive tangentis quadratum, ut rectangulum *SCV*, ad rectangulum *GCH*: hoc est, ut *SV* quadratum, ad *GH* quadratum: Sunt quoque ex Conicis parallelogramma omnia circa diametros Ellipseωs conjugatas descripta inter se æqualia. Unde rectangulum duplæ *PE* in *GH*, æquale erit rectangulo

axium

axium AB in KL. Et per conse-
quens GH, est ad KL, ut AB, hoc VI. 14. *Elem.*
est, per Lemma primum nuperrime
demonstratum, dupla PD, ad duplam PE: sive, ob similitudinem triangulorum yzP & PED, ubi nempe punctum y cum puncto P coalescit, ut Px ad yz. Est ergo Px, ad GH, ut yz, ad KL: atqve adeo
Px quadratum, ad GH quadratum,
ut yz quadratum, ad KL quadratum. VI. 22. *Elem.*
Est autem ex jam assumptis Px
quadratum, ad GH quadratum, ut rectangulum yxI, ad SV quadratum: & SV quadratum (per Lemmatis secundi corollarium) est æquale rectangulo AC in PQ. Est ergo rectangulum yxI, ad rectangulum AC in PQ, ut yz quadratum, ad KL quadratum. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si detur yz, & per consequens yz quadratum, dabitur etiam yx quadratum, & per consequens yx. Hoc est, si distantia perpendicularis minima puncti in perimetro elliptica sumpti à linea per focum detur, in diversis quibuscunque à foco isto distantiis; dabitur lineola evanescens angulo contactus ibidem subtensa. Nam ex modo demonstratis, cum yz ex hypothesi detur, & detur etiam KL; & cum ut rectangulum yx in xI, ad rectangulum AC in PQ, ita est yz quadratum, ad KL quadratum: Et, xI linea in lineam QP ultimo desinente, erit ut $yx \times PQ$, ad $AC \times PQ$, ita yz quadratum, ad KL quadratum. Sed ut $yx \times PQ$, ad $AC \times PQ$, ita est yx, ad AC. Est ergo ut yx, ad AC, ita
yz quadratum, ad KL quadratum: VI. 1. *Elem.*
& invertendo, ut KL quadratum, ad
yz quadratum, ita est AC ad yx; cum ergo reliqua dentur, dabitur & subtensa yx. *Q. E. D.*

Coroll. (2.) Liceat & mihi hic loci inferre quod curvatura Ellipseωs quoad focum est ubique in ipsa distantia à foco ratione directe. Cum enim yz subtensa evane-

vaneſcens anguli contactus in data diſtantia perpendicu-lari in omnibus à foco diſtantiis ſit eadem, erit yx in diſtantiis radio FP proportionalibus in angulis æquali-bus, in † duplicata radiorum ratione directe. A qua ra-tione duplicata dempta, ut oportet, radii ratione, relinquetur curvaturæ ratio in diverſis diſtantiis; eadem nempe cum directa radiorum ratione. Quanquam itaque diverſorum circulorum in angulis iiſdem curvatura cir-ca centrum ſit ubique æqualis; in Ellipſibus tamen è contra in diverſis à foco diſtantiis continuo mutatur, & in majori diſtantia evadit major, in minori minor; at-que id in ipſa diſtantiæ auctæ aut diminutæ ratione. Ut prius annotavimus.

† Per Coroll. 4. Prop. 2. prius.

Coroll. (3.) Liceat quoque & mihi utrumque corol-larium ad Parabolam & Hyperbolam traducere. Quæ enim de Ellipſi ſemel demonſtantur, etiam & Parabolis congruunt; propter Ellipſium infinite oblongarum & Parabolarum coincidentiam. Ea etiam quæ Ellipſibus & Parabolis congruunt ſymptomata, ob mutuam om-nium ſectionum conicarum congruentiam, mutatis rite mutandis ſunt Hyperbolæ applicanda. Quare aſſerere jam licet, & ſubtenſam angulo contactus evaneſcentem ad æquales à radio diſtantias perpendiculares, quoad omnes à foco diſtantias, in quavis ſectione Conica eſſe ſibi ſemper æqualem; & curvaturam proinde in angulis æqualibus eſſe in ratione diſtantiarum directa.

Febr. 5. 170$\frac{4}{5}$.

XV.

Scholium. SIMILI fere ratiocinio quo Newtonus ad ſubtenſarum evaneſcentium rationes quoad Ellipſeωs focum inveſtigandas uſus eſt, etiam & mihi liceat uti ad rationes earundem ſubtenſarum in Ellipſibus

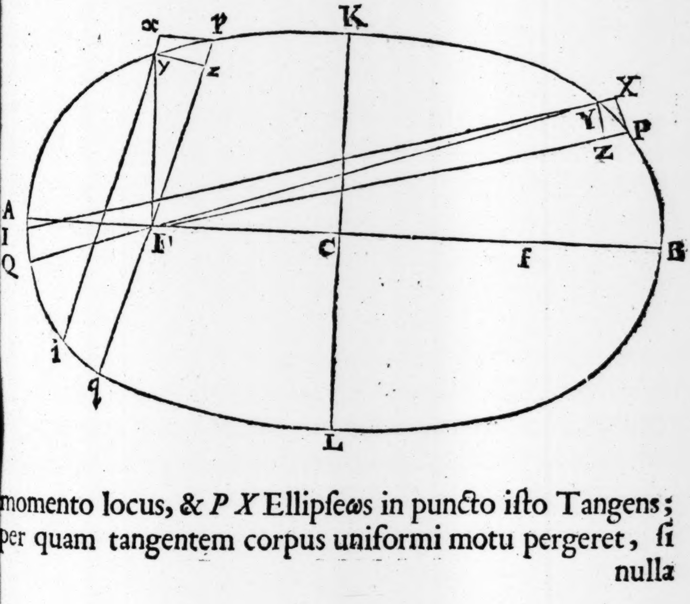
quoad

quoad centrum determinandas. Scilicet per ejusdem Newtoni demonstrata. Est yz quadratum, in SC quadratum, applicatum ad yx lineam; æquale duplo KC quadrato in CB quadratum ad SC lineam applicato; sive $yzq \times SC$ cub. $= 2KCq \times CBq \times yx$. Si detur itaque zy, & per consequens zy quadratum, ob datum etiam solidum $2KCq \times CBq$. Erit yx ubique ut SC cubus, sive in triplicata distantiæ ratione directe. Si itaque, ut oportet, zy sumatur ut distantia, ob subtensam anguli contactus in ratione arcus duplicata, erit yx subtensa in ratione distantiæ quintuplicata; sive, dempta distantiæ ratione, erit ipsa curvatura etiamnum in ratione distantiæ quadruplicata directe; sive ut quadrato-quadratum distantiæ directe.

Princip. Math. Lib. 1. Prop. 10.

Propositio altera. Si corpus ad Ellipseωs focum alterum attrahatur, & ex attractione ista in perimetro elliptica revolvat, attractionis vires erunt ubique ut distantiarum ab eodem foco quadrata reciproce.

Esto P corporis in Ellipsi revolventis quovis temporis



momento locus, & PX Ellipseωs in puncto isto Tangens; per quam tangentem corpus uniformi motu pergeret, si nulla

nulla attractione afficeretur: Sit punctum *X* locus quo corpus dato quovis temporis spatio quam minimo vi sola projectili pertingeret: & sit *Y* locus in perimetro Ellipseωs quo ex viribus conjunctis eodem dato tempore revera pertingit. Dividatur tempus in partes æquales quam minimas, ut quasi momenta physica haberi possint: Agat etiam attractio non perpetuo, sed per intervalla, etiam quam minima; semel nimirum quovis momento physico ineunte; ita ut prima attractionis vis ad punctum *P*, secunda ad *Y* agat, & ita paribus semper intervallis in perpetuum: Ita ut corpus per chordam arcus *PY*, & deinde per chordam arcus sequentis, & ita deinceps moveatur. Quoniam vero Attractio in puncto *P* versus punctum *F* dirigitur, & corpus à tangente *PX* in chordam *PY* detrahit; lineola *XY* à vi attractionis in *P* genita erit vi isti proportionalis, & ipsius directionis, hoc est, lineæ *PF* parallela. Produc lineas *XY* & *PF* ad perimetrum ellipticam in *I* & *Q*: junge puncta *F*, *Y*: & ipsi *FP* demittatur perpendicularis *YZ*. Sit *AB* Ellipseωs axis major, & *KL* axis minor. Et per Lemma tertium erit rectangulum *YXI*, ad rectangulum *AB* × *PQ*, ut est *YZ* quadratum, ad *KL* quadratum. Et per consequens *YX* linea æquabitur solido ex *AB*, in *PQ*, in *YZ* quadratum, ad solidum ex *XI*, in *KL* quadratum applicato. Eodem modo si *py* sit chorda arcus alterius elliptici, quam corpus dato temporis momento physico priori æquali describit; & *px* Ellipseωs in puncto *p* tangens; & *xy* anguli contactus evanescentis subtensa, ipsi *pF* parallela; & si *pF* & *xy* productæ Ellipseωs perimetrum in *q* & *i* secent; & à puncto *y* in ipsam *pF* demittatur perpendicularis *yz*, subtensa *yx* pari ac prius jure æquabitur solido ex *AB*, in *pq*, in *yz* quadratum, ad solidum ex *xi* in *KL* quadratum applicato: hoc est, ob immutabiles & datas

Vid. Fig. p. 143.

B & *KL*, ut $\frac{PQ}{XI}\,YZ$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi}\,yz$ quadratum. Sed quoniam lineæ *PY*, *py* à corpore revolvente qualibus temporibus describuntur, areæ descriptæ, sive riangula *PYF* *pyF* sunt æqualia: atque adeo rectangula orum triangulorum dupla $PF \times YZ$, & $pF \times yz$ sunt qualia: & *YZ*, est ad *yz*, ut *pF*, ad *PF*: & per consequens $\frac{PQ}{XI}\,YZ$ quadratum, est ad $\frac{pq}{xi}\,yz$ quadratum, ut est $\frac{PQ}{XI}\,pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi}\,PF$ quadratum. Est ergo *YX*, ad *yx*, ut $\frac{PQ}{XI}\,pF$ quadratum, d $\frac{pq}{xi}\,PF$ quadratum; hoc est, attractio in *P*, est d attractionem in *p*, ut $\frac{PQ}{XI}\,pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi}$ *F* quadratum. Ponamus jam tempora æqualia, quibus orpus subtensas *PY* & *py* describit, esse infinite parva; a ut attractio fiat continua; & corpus in ipsa Ellipseωs erimetro revolvat. Coalescent in hoc casu lineæ *PQ* & *XI*, & illæ etiam *pq* & *xi*, æquales jam factæ; tque proinde quantitates $\frac{PQ}{XI}\,pF$ quadratum, & $\frac{pq}{xi}$ *F* quadratum, evadent *pF* quadratum, & *PF* quadratum. Erit itaque attractio in *P*, sive lineola *XY*, d attractionem in *p*, sive lineolam *xy*, ut est *pF* quadratum, ad *PF* quadratum; sive ut distantiarum à oco quadrata reciproce. *Q.E.D.*

Et eadem propositio ad Parabolam, utpote Ellipsium xtremam, pari jure est applicanda. Nec non ad Hyperbolam etiam extendi debet: sed cum nulla corpora cœlestia nobis cognita in Hyperbolis gyrentur, de peculiari demonstratione eisdem applicanda minus hoc in loco olliciti sumus. Qui eam desiderant apud Newtonum facile reperient. *Prop. 12.*

L XXII.

XXII. Corporis in linea Parabolica moventis circa corpus attractivum in foco positum, cujus vires sunt in ratione duplicata distantiarum reciproca, velocitas est ubique, ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in subduplicata numeri binarii ad unitatem ratione; sive ut Diameter quadrati ad latus, hoc est, in ratione 10 ad 7 fere.

Cum enim distantia corporis à centrali corpore ponatur utrinque eadem, erit vis attractionis sive lineolæ augulo contactus utrinque subtensa, dato quovis temporis spatiolo, utrinque æqualis. Et velocitas in Parabola, erit ad velocitatem in Circulo, ut Parabolæ tangens, ad Circuli tangentem; ubi nempe subtensa est utrinque æqualis. Est vero tangens minima in Parabola ex conicis æqualis rectanguli subtensæ in latus rectum verticis cujusque ductæ radici quadraticæ. Et tangens minima in circulo æqualis rectanguli subtensæ in circuli diametrum ductæ radici quadraticæ. Sed ob datam utrinque subtensam, & verticis Parabolæ latus rectum ex conicis circuli diametri duplum; sive ut 2 ad 1. erit rectangulum prius posterioris etiam duplum, vel ut 2 ad 1. unde tangentes, sive radices quadraticæ erunt inter se ut radix quadratica numeri binarii, ad unitatem; sive ut diameter quadrati ad latus. Hoc est, fere ut 10 ad 7. *Q.E.D.*

III. 36. *Elem.*

Coroll. (1.) Cum itaque velocitas in Parabola, sit ad velocitatem in circulo, ad eandem à foco distantiam, in ratione data; nimirum $\surd. 2$ ad 1. & cum velocitas in diversis circulis sit in subduplicata radiorũ ratione reciproca, erit quoque velocitas corporis parabolam describentis in diversis à foco distantiis in subduplicata distantiarum ratione reciproca.

Coroll. (2.) Velocitas corporis in Ellipsi gyrantis est minor quam in Parabola ad eandem distantiam à foco; & velocitas corporis in Hyperbola gyrantis est major quam in Parabola ad eandem distantiam: Unde velocitas in Ellipsi, erit ad velocitatem in Circulo ad eandem di-

Vid. pag. 23. *prius.*

antiam, in minore ratione quam $\surd$. 2 ad 1. & in Hyperbola velocitas erit, ad velocitatem in circulo, d eandem diſtantiam, in majore ratione quam $\surd$. 2 d 1.

Coroll. (3.) Cognita itaque corporis ad diſtantiam uamvis à foco velocitate, cognoſcetur trajectoriæ fi-ura; utrum illa nimirum ſit Circulus, Ellipſis, Para-ola, vel Hyperbola. Et ex accuratiore calculo ſi ſit llipſis, vel Hyperbola, quænam ſit earum figurarum ecies quam corpus revolvens deſcribere debeat.

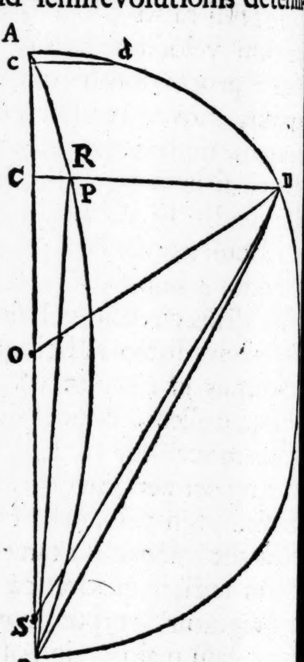
Coroll. (4.) Ex noviſſime demonſtratis conſequens eſt uod ſi corpus quodvis, ſecundum lineam quamvis re-tam, (niſi ea ad ipſum focum directe tendat,) quacun-ue cum velocitate exeat, & vi centripeta quæ ſit re-iproce proportionalis quadrato diſtantiæ à centro ſimul gitetur, movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum co-icarum, umbilicum habente in centro virium. Ni-nirum, ſi linea ſecundum quam corporis motus proje-tilis tendit ſit radio perpendicularis, & velocitas ſit ttractioni æquipollens; hoc eſt, ſi velocitas dato tem-ore quovis minimo ſit rectanguli ex ſubtenſa anguli con-actus iſtius circuli, vel ſinu verſo, in ejuſdem circuli iametrum ducto radici quadraticæ æqualis; movebi-ur corpus in circulo. Si autem velocitas ſit attracti-ni æquipollens, & linea directionis ad radium obliqua, orpus movebitur in Ellipſi, cujus tempus periodicum rit tempori periodico circuli, in quem migrare potuit, quale. Sin velocitas ſit velocitate prius aſſignata aut najor aut minor, ita tamen ubi major eſt, ut ultra ra-ionem radicis quadraticæ numeri binarii ad unitatem on augeatur, corpus movebitur in Ellipſi, circulo in riore caſu majore, in poſteriore minore. Quod ſi ve-ocitas ſit, ad velocitatem in circulo, ut radix quadra-ica numeri binarii, ad unitatem, corpus movebitur in Parabola. Si denique velocitas ſit adhuc major, cor-us in Hyperbola movebitur.

XXIII. *Probl.* Poſito quod vis centripeta ſit reciproce

proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, tem-
pora definire quibus corpora rectà cadendo centrum attin-
gent.

Eodem axe principali, ſive diametro tranſverſa, *AB*, deſcriptæ ponantur Ellipſium utrinque extremæ, circu- lus nimirum, *ADB*, & recta linea *AB*. Ex æquali- tate harum diametrorum tranſverſarum erunt tempora periodica utrinque æqualia; & proinde ſemirevolutionum tempora erunt ſibi invicem æqualia. Hoc eſt tempus de- ſcenſus per diametrum, æquale tempori revolutionis per ſemicircumferentiam. Cum itaque ex prius demon- ſtratis facile ſit tempus iſtud ſemirevolutionis determi- nare, exinde quoque fa- cile fuerit tempus de- ſcenſus directi definire. Exempli gratia. Tem- pus ſemiperiodi Lunaris continet minuta prima 19.671L5. Ubi nempe ejus Orbitæ diameter eſt diſtantiæ ſuæ mediocris à terræ centro dupla. Et eſt tempus hoc, ad tempus ſemiperiodi ad diſtantiam dimidiam, quod nunc quærimus, in ſeſquialtera rati- one diſtantiarum; hoc eſt, fere ut 2828 ad 1000. ſive ut 19.671L5 ad 6.955L5. Unde tem- pus ſemiperiodi in di- ſtantia prioris dimidia, (ubi nempe diſtantia integra Lunæ ſive orbitæ ſemi- diameter circuli diameter evadit,) hoc eſt tempus cor- poris ad Lunæ diſtantiam poſiti, & directe cadentis in terr

Coroll. 4. poſt Prop. 21. prius.



rræ centrum, erit minutorum primorum 6.95515. ve dierum 4. horarum 19. minutorum primorum 55. secundorum 30. Et hoc temporis spatio ipsa Luna, motus ejus sisteretur, & tellus maneret immobilis, ab bita sua ad telluris centrum caderet. Et simili ratio-nio tempus casus cujusvis Planetæ à motu suo cessan-, & deorsum in Centrum cadentis satis facile poterit de-rminari; uti in proximo Scholio fiet.

Scholium. Cum itaque tempus cujusque Planetæ se-iperiodi, diminutum in ratione 1000 ad 2828, sit tem-s casus directi in centrum, sequens tabella, eo fun-mento innixa, planetarum omnium in centra sua caden-um tempora exhibebit.

		dier.	hor.
Mercurius,	*in Solem caderet spatio*	15	13
Venus,		39	17
Terra,		64	14
Mars,		121	11
Jupiter,		767	3
Saturnus,		1900	4
Planetarum Circumjovialum			
Intimus,	*in Jovem caderet spatio*	00	7
Secundus,		00	15
Tertius,		1	6
Quartus,		2	23
Planetarum Circumsaturniorum			
Intimus,	*In Saturnum caderet spatio*	0	8
Secundus,		0	12
Tertius,		0	19
Quartus,		2	20
Quintus,		14	1
Luna in Terram caderet spatio		4	20

Febr. 19. $170\frac{4}{5}$.

XVI.

XXIV. PROBLEMA. Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro virium, tempora definire quibus corpora rectà deorsum cadendo spatia quævis data describant.

Si corpus non cadat perpendiculariter, describet id sectionem aliquam conicam, cujus *umbilicus inferior* (propter motus projectilis descensum hic suppositum) congruet cum centro virium, uti ex ante dictis constat. Sit sectio illa conica Ellipsis $ARPB$. ubi nimirum projectionis velocitas, est ad velocitatem qua corpus in circulo ad eandem distantiam revolvere posset, in minore ratione quam est radix quadratica numeri binarii ad unitatem. Sit hujus Ellipseωs umbilicus inferior S. & super hujusce Ellipseωs axe majore AB describatur semicirculus ADB. Et per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem, actisque ad umbilicum DS & PS; erit area ASD, areæ ASP, atque adeo tempori proportionalis. Est enim ut CD, ad CP, ita area trianguli SCD, ad aream trianguli SCP. Est etiam ex Conicis ut eadem CD, ad eandem CP, ita area circularis CAD, ad aream Ellipticam CAP. Et proinde, erit priorum arearum summa ASD ad summam posteriorum ASP, ut CD, ad CP; sive ut axis major Ellipseωs, ad ejusdem axem minorem: atque adeo in ratione data, tempori proportionali. Manente jam Ellipseωs axe majore, sive circuli diametro AB, minuatur perpetuo Ellipseωs latitudo, sive axis minor; & semper, ex vi jam demonstratorum, manebit area ASD tempori proportionalis: minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe APB elliptico jam coincidente cum axe AB: & umbi-

Prop. 21. prius. Vid. Fig. p. 148.

Coroll. 2. Prop. 22. prius.

VI. 1. *Elem.*

V. 12. *Elem.*

umbilico *S* cum axis termino *B*: deſcendet corpus in recta *AC*; & area *ABD* evadet hoc etiam in caſu tempori proportionalis. Unde ſi linea recta ut *CD* axi perpendicularis ita ſibi parallelas ſemper deorſum moveri ſupponatur, ut area *ABD* ſit ubique tempori proportionalis, punctum *C* locum determinabit, ad quem eodem tempore dato corpus deorſum in centrum cadens eſt perventurum.

Exempli gratia, Sit *AB* Lunæ à centro telluris diſtantia mediocris pedum, ut prius, circiter 1.257.696.000. Requiritur ut Lunæ rectà deſcendentis locum die caſus primo exeunte determinemus. Notum eſt ex olim demonſtratis quod ſi motus Lunæ ceſſaret, caderet illa ſpatio unius minuti primi pedes Anglicos 16⌊1 circiter. Unde erit area circularis *ABd* pedum quadratorum quaſi 89.483.812.704.000 [æqualis nimirum rectangulo *cd* in $\frac{1}{2}$ *AB* ducto.] Unde cum diei integro inſunt minuta prima 1440 erit area circularis *ABD* diei integro debita pedum quadratorum quaſi 128.856.690.293.760.000. Eſt vero tempus datum minuta prima 1440. Si itaque punctum *D* definire poſſimus, ita ut area *ABD* ſit pedum quadratorum 128.856.690.293.760.000 ſinus arcus *AD*, hoc eſt *DC*, lineam eo tempore deſcriptam *AC* determinabit, utpote ejuſdem arcus ſinum verſum. Area autem iſta æquatur rectangulis $\frac{1}{2}$ $CD \times OB$ & $\frac{1}{2}$ $AD \times OB$ ſive rectangulo $\frac{1}{2}$ $CD + \frac{1}{2}$ $AD \times OB$. Si itaque area data per ſemidiametrum *OB* dividatur, quotus exhibebit ipſarum *CD* & *AD* ſemiſſem. Ex ſinuum itaque tabula quærendus eſt arcus ille, cujus ſemiſſis ſemiſſi ſinus ſui ſuperadditus quotum iſtum eſt exhibiturus. Eſt vero ex calculo quotus iſte pedum 204909,120, ſive ad circulum cujus radius eſt partium

Coroll. 7. poſt Prop. 2. prius.

Coroll. poſt Prop. 5. Selec. ex Archimed.

10.000.000. reducendo, eſt partium illarum 3.258.484. Et ſi apud ſinuum tabulas ſinum ad gradum undevigeſimum, & iſtius gradus ſcrupulum quinquageſimum exeuntem reſpiciamus, ſinus unius minuti primi per minuta 1130 multiplicatus 2909 X 1130, partes dabit 3.287.170, arcui nimirum *AD* graduum 18 & ſcrupulorum primorum 50 congruas; cujus arcus ſinus eſt partium 3.228.165, & utriuſque ſumma erit partium 6.515.335 cujus ſemiſſis 3.257.667. cum numero priore 3.258.484 ſatis accurate congruit. Eſt ergo linea *CD* ſinus graduum 18, & minutorum primorum 50, & linea eo temporis ſpatio deſcripta eſt iſtius arcus ſinus verſus longus nimirum partes 535.382, hoc eſt, reducendo ad ſemidiametrum orbitæ Lunaris, longus pedes 33.667.390, hoc eſt, milliaria Anglica 6.376 cum pedibus 2.110. Et eodem modo tempus definetur quo Luna ad ipſum telluris centrum eſſet deſcenſura. Sed quoniam illud ex alia computandi ratione eaque faciliori olim deduximus, calculo iſti impræſentiarum ſuperſedebimus.

Prop. 23. prius.

Corollarium. Si figura *RPB* non ſit Ellipſis, ſed Hyperbola, vel Parabola, res eodem modo per Hyperbolam rectangulam, vel parabolam quamvis conficietur; ſed ob praxin difficiliorem, & minus neceſſariam eandem mittemus.

Coroll. (2.) Tempora quibus corpora quævis in centrum ex diſtantiis diverſis caderent, ſunt inter ſe in ſeſquialtera diſtantiarum illarum ratione directe. Eſt enim lineola *Ac* dato tempore ad diſtantias diverſas genita in duplicata diſtantiæ ratione reciproce; unde erit & ſinus quam minimus in ſubſeſquiplicata diſtantiæ ratione reciproce. & Area $\frac{1}{2}$ *cd* in *AB* ſimul deſcripta in ſubduplicata diſtantiæ ratione directe. Unde cum area integra ſemicircularis *ADB* ſit in duplicata ra-

one diſtantiæ directe, erit tempus eidem proportionale in ratione diſtantiæ ſeſquiplicata directe. *Q.E.D.*

Exempli gratia, Sit *AB* altera ipſius *AB* dupla; erit tum ſubtenſa evaneſcens anguli contactus, ſive lineola *Ac*, ipſius *Ac* pars tantum quarta. Et erit ſinus *c d*, ipſius *c d* ſubſeſquiplicata, ſive ut latus quadrati ad diametrum; hoc eſt, ut 7 ad 10 fere. Erit quoque area $\frac{1}{2}$ *cd* × *AB* ad $\frac{1}{2}$ *cd* × *AB*, fere ut 2 × 7 = 14 ad 1 × 10 = 10. Unde area in majori diſtantia deſcripta erit ad aream in minori, ſed eodem tempore deſcriptam fere, ut 14 ad 10; vel ut diameter in quadrato ad latus. At integra area à majori linea *B D* in deſcenſu deſcribenda, eſt ad aream à minori linea *B D* in deſcenſu deſcribendam, ut 4 ad 1; ſive ut 40 ad 10. Ergo erit tempus deſcenſus in majori diſtantia, ad tempus deſcenſus in minori, in ratione exceſſus rationis 40 ad 10 ſupra rationem 14 ad 10: Sed iſta exceſſus ratio eſt ut 40 ad 14, ſive ut diameter quadrati ad lateris quadruplum. Unde tempora ſunt inter ſe ut diameter quadrati ad lateris quadruplum, hoc eſt, in ſeſquialtera diſtantiarum ratione directe. *Q.E.D.*

Prop. 2. Coroll. 4. ſupra.

Coroll. (3.) Si itaque Planetarum primariorum, quin & Circumjovialium & Circumſaturniorum quemvis in centrum orbitæ cadentem ſupponamus, & horum tempora deſcenſus ſemel definita habeamus, facile fuerit ex notis reliquorum diſtantiis eorum etiam deſcenſus tempora definire; quod ex alio fundamento prius præſtitimus: Neque proinde actum jam hic loci agemus.

Coroll. (4.) Cum itaque velocitas in Ellipſi in mediocri ab umbilico diſtantia, hoc eſt, velocitas cadentis ad centrum *O* Ellipſeωs in rectam deſinentis, ſit æqualis velocitati æquabili corporis in circulo, cujus radius eſt *BO*, gyrantis, liquet velocitatem cadentis in ipſo ſpatii medio *O* eſſe æqualem velocitati gyrantis in circulo ad eandem diſtantiam. Unde quoque ſequitur velocitatem cadentis in diſtantia remotiori eſſe velocitate circulari

culari minorem, & in diſtantia propinquiori majorem.

XXV. *Problema.* Poſito quod vis centripeta ſit proportionalis altitudini, ſeu diſtantiæ locorum à centro directe, tempora definire quibus corpora rectâ cadendo ſpatia quævis data deſcribant.

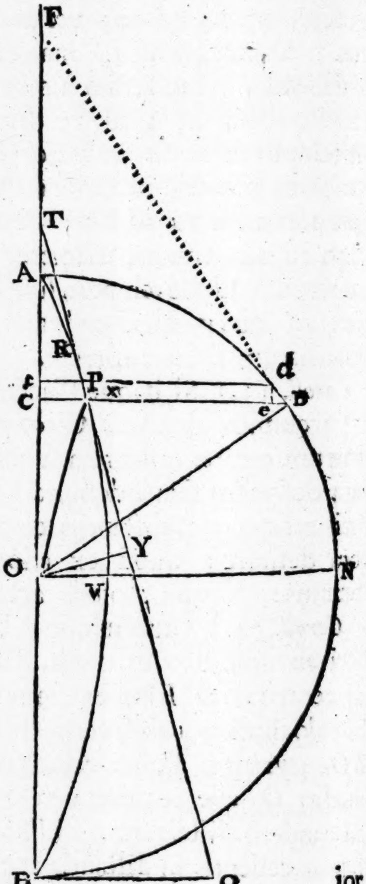
Si corpus non cadat perpendiculariter, deſcribet id ſectionem aliquam conicam, cujus *centrum* congruet cum virium centro; uti ex ante dictis conſtat. Sit ſectio illa conica Ellipſis *ARPB*. Ejus centrum *O*. & ſuper hujus Ellipſeos axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ABND*. & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem: actiſque ad centrum *DO* & *PO*, erit ex Conicis Area *AOD* Areæ *AOP*, atque adeo tempori proportionalis. Eſt enĩ ut prius ut *CD*, ad *CP*, ita area trianguli *OCD*, ad aream trianguli *OCP*. Et etiam ex Conicis ut eadem *CD*, ad eandem *CP*, ita area circularis *CAD*, ad aream Ellipticam *CAP*. Et proinde, erit arearum priorum ſumma *AOD*, ad ſummam poſteriorũ *AOP*, ut *CD* ad *CP*: ſive ex Conicis ut axis ma-

Prop. 19. prius.

Prop. 15. prius.

VI. 1. Elem.

V. 12. Elem.



jor

jor Ellipseωs ad ejusdem axem minorem: atque adeo in ratione data, tempori proportionali. Manente jam Ellipseωs axe majore, sive circuli diametro *A B*, minuatur perpetuo Ellipseωs latitudo, sive axis minor. Et ex vi jam demonstratorum manebit area *AOD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum; & Orbe *ARPB* elliptico jam coincidente cum axe *AB*, descendet corpus in recta *AC*. & area *AOD* evadet hoc etiam in casu tempori proportionalis. Unde si linea recta ut *CD* axi perpendicularis ita sibi parallelωs semper deorsum moveri supponatur, ut *AOD* sit ubique tempori proportionalis, punctum *C* locum determinabit ad quem eodem tempore dato corpus deorsum cadendo est perventurum.

Corollarium. Propter æqualitatem areæ circularis æquali tempore ubique describendæ circa circuli centrum, erit motus puncti *D* semper æquabilis, & arcus æquales dato tempore describet.

Coroll. (2.) Tempora itaque corporum cadentium, & spatia quæcunque describentium, ut *AC*, sunt inter se ut ipsi arcus *AD*. Et spatia descripta ut arcuum sinus versi, *AC*.

Coroll. (3.) Velocitates autem in locis quibusvis ut *C*, genitæ, sunt ut arcuum *AD* sinus recti. Ducatur enim linea *c d* ipsi *CD* parallela, in distantia nempe infinite parva; & ducatur circuli tangens *dD*. Dum itaque punctum *D* describit tangentem *dD*, corpus cadens describit lineolam *c C* ipsi *de* æqualem; & ob datam puncti *D* velocitatem, dato tempore dabitur etiam *dD* longitudine. Erit ergo in triangulo *deD* *dD* radius circuli datus, & *de* anguli *dDe* sinus rectus. Et propter similitudinem triangulorum *deD* *COD*, erit eo loci radius *OD*, & sinus rectus anguli *AOD* ipsa *CD*. Est ergo velocitas in punctis quibusvis *C* ut arcus *AD* sinus rectus. *Q.E.D.*

Coroll. (4.) Tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usque centrum cadunt sunt ubique æqualia.

Cum

Cum enim ex Hypothesi vis acceleratrix, atque adeo velocitas genita, sit ut linea describenda, palam est tempora descensus esse ubique æqualia. *Q.E.D.*

Coroll. (5.) Cum ex olim demonstratis corporum omnium circa Ellipseωn centrum gyrantium tempora periodica sint æqualia, erunt & temporum periodicorum quadrantes per *ARPV* æquales. Et cum hoc in Ellipsibus quibuscunque verum sit, etiam & in Ellipsium hinc inde extremis, hoc est, in linea recta *AO* & arcu quadrantali *AN* verum erit. Hoc est, æqualia erunt tempora quibus corpus unum de loco quocunque *A* cadendo pervenit ad centrum *O*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem. *Q.E.D.*

Coroll. 3. Prop. 19. supra.

Scholium (1.) Cum itaque tempus periodicum Lunæ circa terram, sit ad tempus periodicum corporis cujusvis circa centrum telluris revolvens ad semidiametri terrestris distantiam, in sesquialtera distantiarum ratione; & cum intra superficiem telluris vis centripeta sit ubique in directa distantiæ ratione, uti olim demonstrabitur; juvabit superioris ratiocinii exemplum in medium proferre; & quo temporis spatio gravia, posito ad centrum puteo vel foramine vacuo, illuc descenderent calculo ostendere. Ut ergo temporis periodici in telluris superficie quadrantem, quo nimirum corpora omnia ad centrum accederent, juxta jam demonstrata investigemus, fiat ut distantiæ Lunaris cubus, $60 \times 60 \times 60. = 216.000.$ ad semidiametri terrestris cubum, $1 \times 1 \times 1. = 1.$ ita periodi Lunaris quadratum $39.343'. \times 39.343'. = 1.547.871.649.$ ad periodi in superficie terrestri quadratum $= 7.166\llcorner 07.$ cujus radix quadratica $84\llcorner 6$ exhibebit scrupulos primos horarios quibus corpus vel Planeta ad semidiametri terrestris distantiam à centro circa illud integram periodum absolveret. Cujus numeri quadrans $21\llcorner 15$ exhibebit temporis spatium

Schol. post Prop. 14. prius.

scru-

ſcrupulis itidem primis deſignatum, quo gravia quæcunque per ſemidiametrum terreſtrem ad ejuſdem centrum pervenirent. Et cum in diſtantiis quibuſcunque idem ſit caſûs tempus, uti jam oſtenſum, liquet corpora omnia ſcrupulis primis viginti & uno, cum partibus ſcrupuli centeſimis quindecim, ſive ſcrupulis ſecundis novem, à ſuperficie ad centrum eſſe deſcenſura.

Coroll. 4. prius.

Schol. (2.) Sin tempus caſûs per ſpatium quodlibet datum abſque Algebræ uſu requiratur; ſcilicet per ſemidiametri terreſtris trientem; quære apud ſinuum Tabulas, ad quem angulum ſinus verſus eſt ſinus totius pars tertia; nimirum ad arcum *AD* graduum 41°. 25′. Unde tempus caſus per *AC*, ſemidiametri trientem, erit ad tempus caſus integri ad centrum, ut Arcus *AD*, ad arcum quadrantalem *AN*: ſive ut 41°. 25′. ad 90°. Et cum 90° : 41°. 25′. : : 21L15 ſcrupuli primi horarii : 9L97, ſive 9′ : 58″. liquet corpus quodvis per ſemidiametri terreſtris trientem ſcrupulis primis horariis novem, & ſecundis quinquaginta octo eſſe deſcenſurum. Et velocitatem in puncto *C*, eſſe ad velocitatem maximam, ubi ad ipſum centrum deſcenderet, in ratione ſinus Recti *CD*, ad ſinum totum *ON*: ſive ut 66.153 ad 100.000. uti ex nuperrime demonſtratis eſt apertiſſimum.

Vid. Fig. p. 154.

Coroll. 2. prius.

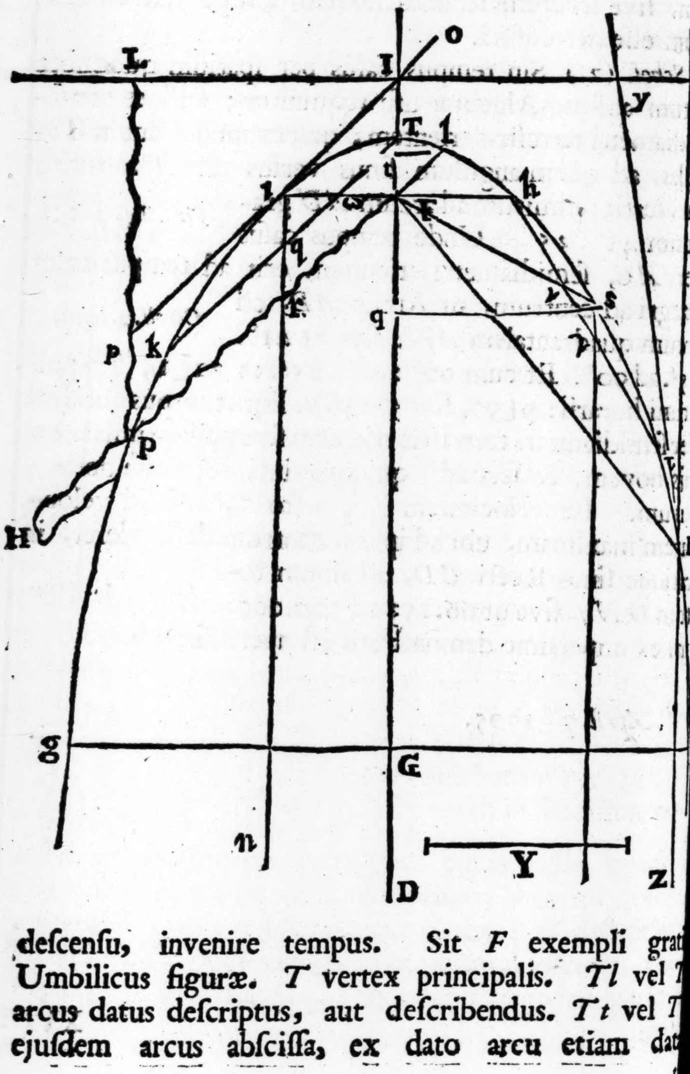
Coroll. 3. prius.

April 7. 1705.

XVII.

XVII.

XXVI. PROBLEMA. Corpore in data trajectoria parabolica circa focum delato, dati arcus descripti, aut describendi, sive in ascensu sive in



descensu, invenire tempus. Sit *F* exempli grat[ia] Umbilicus figuræ. *T* vertex principalis. *Tl* vel *T*[…] arcus datus descriptus, aut describendus. *Tt* vel *T*[…] ejusdem arcus abscissa, ex dato arcu etiam da[…]

l vel *qs* semiordinata, ex arcu dato etiam data. Requiritur tempus arcus istius *Tl* vel *Ts* descripti, aut describendi. Ex data Parabola datur ejusdem Latus rectum, ejusque proinde pars quarta *TF*. Ex data quoque corporis centralis vi centripeta, datur corporis in vertice principali velocitas; quæ nempe est ad velocitatem corporis circulum, cujus radius est *TF*, describentis ut radix quadratica numeri binarii ad unitatem. Unde quoque datur & area minima à radio *TF* dato quovis tempore minimo describenda. Est autem area *FTl* vel *FTs* æqualis duabus tertiis rectanguli *Tt* × *tl*, vel *Tq* × *qs*. Cui si *addatur* triangulum *Ftl* in priore casu, & in posteriore ab eodem *aufratur* triangulum *Fqs*, datur & area *Ftl* vel *Fts*: quæ per aream minimam dato quovis tempore minimo in vertice *T* descriptam divisa, dabit tempus quæsitum. *Q. E. I.*

Prop. 22. prius.

Exempli gratia, sit Parabola data illa quam Cometa exeunte Anno 1680. & ineunte 1681. per Europam visus descripsit. Sit *Fq* orbis magni semidiametro æqualis, partium nempe æqualium 10.000, qualium partium sit latus rectum 236L8. Et proinde *FT* partium 59L2, & integra abscissa *Tq* partium 10.059L2. Ponamus etiam Cometam fuisse in Parabolæ vertice, sive perihelio suo *T* Decembris 8°, scrupulo quarto post meridiem. Ad velocitatem Cometæ in vertice Parabolæ inveniendam, reperiatur primum Planetæ ad istam distantiam in circulo revolventis velocitas; nempe ex hac analogia: ut radix quadratica distantiæ *FT*, partium 59L2 = 7L7. ad radicem quadraticam distantiæ *Fq*. partium 10.000 = 100. ita velocitas Telluris annua, ad velocitatem Planetæ circulum cujus radius est *FT* describentis. Deinde, ut radix quadratica numeri binarii = 1L414, ad unitatem, ita erit velocitas Cometæ in vertice parabolæ suæ, ad velocitatem Planetæ in circulo ad eandem distantiam.

Vid. Newt. p. 494 & 498.

Prop. 13. prius.

am. Est autem velocitas Telluris mediocris hujusmodi quæ spatio minuti unius primi describat partes ⌊1195. & 7⌊7 : 100 :: ⌊1195 : 1⌊552. Unde velocitas Cometæ in perihelio suo ea erit quæ spatio unius minuti primi describat partes $\frac{1⌊414}{1}$ 1⌊552 = 2⌊19. qualium semidiameter orbis magni est 10.000, & qualium distantia Cometæ minima est 59⌊2. Area itaque dato illo tempore à Cometa radio ad centrum Solis ducto descripta æqualis est rectangulo $\frac{1}{2}$ 59⌊2 × 2⌊19 = 64⌊824. partibus quadratis. Ut itaque jam tandem temporis spatium arcum parabolicum ut *Ts*, ubi *Fq* est magni orbis semidiametro æqualis describendi investigemus, aream *TsF* computabimus, & cum area priore unico minuto primo descripta conferemus. Itaque, ut *TF* partium 59⌊2, ad *Tq* partium 10.059⌊2. ita sit quadratum *Fh* partium 118⌊4 = 14.018⌊56, ad partes quadratas 2.382.018⌊61. cujus numeri radix quadratica = 1.543⌊3. ex Conicis æqualis erit semiordinata *qs*: qua in dimidiam distantiam *Fq* ducta 1.543⌊3 × $\frac{1}{2}$ 10.000 = 7.716.500 emerget trianguli additit[i] *Fqs* area. Est autem area parabolica integra *Tsq* æqualis duabus tertiis rectanguli *Tq* partium 10.059⌊2 in *sq* partium 1.543⌊3 ducti, sive partibus quadrat[is] $\frac{2}{3}$ 15.524.363⌊36 = 10.349.575⌊57. E quo numer[o] deducatur triangulum *Fsq*. 7.716.500 relinquetur ar[ea] descripta partium quadratarum 2.633.075⌊57. quib[us] per partes areæ uni minuto primo debitas divi[sis] $\frac{2.633.075⌊57}{64⌊824}$ prodit temporis spatium quæsitum: q[uo] nempe Cometa arcum *Ts* describeret = 4.061⌊9 = 2[8] 4^h. 59′. Unde arcus *Ts* describetur diebus vigi[nti] octo, & horis prope quinque. Et Cometa punctum

occup[...]

occupabat Januarii quinto, hora circiter post meridiem quarta. Quod etiam cum schemate Newtoniano ex observationibus deducto exacte congruit.

Si itaque ex hujusmodi calculis cujusvis Cometæ Parabolam, aut potius Ellipsin adeo eccentricam, ut pro Parabola tuto haberi possit, describentis arcubus quibusvis, ut *Ts*, tempora congrua semel determinata haberemus, ex inversa methodo etiam temporibus quibusvis arcus congruos satis accurate definire possemus: eadem nempe operandi ratione qua in Hypothesi Kepleriana ejusque tabulis ex data anomalia Planetarum media in Ellipsibus, eorundem coæquatam invenire solemus.

Coroll. (1.) Cum itaque evanescat triangulum ablatitium *Fsq* in puncto *h*, erit tum temporis area computanda æqualis duabus tertiis rectanguli *TF* in *Fh*; sive $\frac{2}{3}\ 59\llcorner 2 \times 118\llcorner 4 = 4.676\llcorner 8$. & proinde tempus huic areæ debitum æquale $\frac{4.676\llcorner 8}{64\llcorner 824} = 1^h.\ 12'.\ 9''$.

Unde arcus *Th* inter verticem principalem parabolæ, & axi ordinatam per focum describebatur hora una, scrupulis primis duodecim, & secundis novem. Et Cometa punctum *s* occupabat Decembris octavo, scrupulo primo decimo septimo post horam primam pomeridianam.

Coroll. (2.) Hinc etiam temporis spatium quo arcus quivis datus describitur facile innotescit: computando nimirum tempus à perihelio ad locum utrumque, & tempus brevius à longiori auferendo. Eo enim pacto innotescet intervallum temporis arcui dato debitum. Sic sane deducto tempore arcui *Th* congruo $= 1^h.\ 12'.\ 9''$. ex tempore arcui *Ts* congruo $= 28^d.\ 4^h.\ 59'$. reliquum est temporis intervallum arcui *hs* congruum. $= 28^d.\ 3^h.\ 46'.\ 51''$. Atque ita ubique.

Coroll. (3.) Hinc etiam methodus ex tempore dato arcum descriptum inveniendi peti potest. Cum enim punctum *h* evanescat semper triangulum ablatitium *Fqs*, aut addititium *Ftl*; & area proinde eo loci facillime computetur, partium nempe quadratarum in nostro

M exemplo

exemplo 4.677L0.516. Cum etiam eo loci *TF* sit ipsius *Fh* semissis; cum demum abscissa *TF* eadem semper ratione crescat, quo crescit ipsius ordinatæ *Fh* quadratum; dato quovis tempore, sive area ipsi proportionali, dabitur arcus eidem congruus: si incrementorum vel decrementorum proportionalium ea quantitas sumatur ut $\frac{1}{2}$ *qs* × *Fq*, ex $\frac{2}{3}$ *qs* × *Tq* ablata reliqua sit quantitas areæ datæ. Sic sane, Ut arcum 28^d. 14^h. 59′. = 40.619′. hoc est, areæ partium quadratarum 2.633.075L57 congruum inveniam, Quæro per tabulas quadratorum numerorum, si absque Algebræ auxilio agendum, Ubi talis occurrit numerus, sumpta linea *TF* tanquam unitate: & Area *FTh* tanquam primaria, vel unitate quadrata: vel $\frac{2}{3}$ *TF* × *Fh* = 563. parte areæ totius: & *Fh* tanquam numero binario:) Ut numeris unitati addendis proportionalibus existentibus, numerorum binario addendorum quadratis $\frac{1}{2}$ *qs* × *qF* de $\frac{2}{3}$ *qs* × *Tq* ablato, reliqua sit area data = 563. Qui numerus alibi non occurret nisi eo loci ubi *Fq*, est ad *FT*, ut 10.000 ad 59L2. Sive ut 167 ad 1 fere. Unde liquet arcum quæsitum eum ipsum esse cujus *Tq* partium 10.059L2 est abscissa. Sed cum hæc methodus non nisi tentando fiat, directa non est. Satis tamen est quæ tabularum condendarum originem & methodum aliquatenus indicare possit.

Scholium. Notandum est, methodum Newtoni Geometricam ex dato tempore arcũ descriptum directe indicare. Si nimirum fiat ut tempus *ThF* tempus areæ congruum ad tempus datum, ita *FT* ad *ty*: puncto *t* mediam lineam *TF* occupante, & *ty* ad *TF* perpendiculari ducta, Erit distantia à foco *yF* æqualis *ys*. Unde circulus isto radio descriptus punctum designabit. Sed cum calculo methodus ista minus sit idonea, eandem missam impræsentiarum faciemus.

Vid. Newt. L. I. Prop. 30.

Scholium. Hactenus exposuimus præcipue motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale t...

m...

men vix extat in rerum natura. Attractiones autem fieri solent ad corpora: & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt, & æquales, uti olim ostendimus; adeo ut neque attrahens possit quiescere, neque attractum, si duo sint corpora; sed ambo quasi attractione mutua, ubi motus projectilis utriusque more debito utrique semel est impressus, circum gravitatis centrum commune revolvantur. Et si plura sint corpora, (quæ vel ab unico attrahantur, vel omnia se mutuo attrahant,) hæc ita inter se moveri debeant ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum, ut olim quoque ostendimus. Qua de causa jam pergimus motum exponere corporum se mutuo trahentium: considerando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus à Matheseωs studiosis facilius intelligi.

Lex Motus 5. prius.

Lex Motus 25. prius.

XXVII. Corpora duo se invicem trahentia describunt & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo figuras similes: hoc est, describendo revera figuras similes circa commune gravitatis centrum; oculo in alterutro duorum posito, & motum corporis hujus vel centri gravitatis non percipiente, figura iisdem similis describi videbitur.

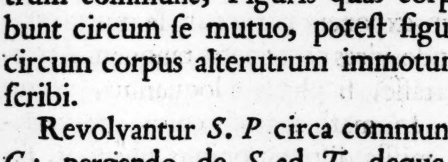
Sunt enim distantiæ à communi gravitatis centro corporibus reciproce proportionales, atque adeo in data ratione ad invicem: & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ quæ sint in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circa eos-

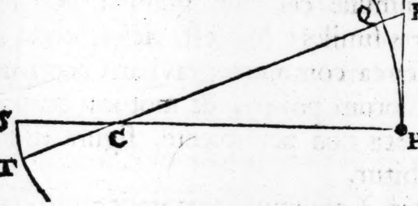
dem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt, vel motu quovis non angulari moventur,) describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q. E. D.*

Scholium. Sic sane & Tellus & Luna motu menstruo circa commune utriusque centrum gravitatis feruntur: nobis vero in tellure positis, quibus neque terræ, sedis nostræ, neque centri gravitatis, utpote puncti invisibilis motus sentiri potest, sola Luna circumferri videtur: & ita in reliquis omnibus planetarum systematis accidat est necesse.

XXVIII. Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahant, & interea revolvantur circa gravitatis centrum commune, Figuris quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis circum corpus alterutrum immotum viribus iisdem describi.

Revolvantur *S. P* circa commune gravitatis centrum *C*; pergendo de *S* ad *T*. deque *P* ad *Q*. *A* dato puncto *s* ipsis *SP. TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp. sq.* & curva *pqv*, quam punctum *p* revol vendo circum pun ctum immotum describit, erit simi lis & æqualis cur vis quas corpor *S. P* describun circum se mutuo proindeq; per Pro positionem postre mam similis curv *ST* & *PQV* qu eadem corpora d scribunt circa commune gravitatis centrum *C*. id ad quia proportiones linearum *SC. CP.* & *SP.* vel ad invicem ubique dantur.





CASU

CASUS (1.) Commune illud gravitatis centrum *C*, per motus legem 25. vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit: inque *s* & *p* locentur corpora duo: immobile in *s*; & mobile in *p*: corporibus *S* & *P* respective similia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR.* & *pr.* curvas *PQ.* & *pq.* in *P.* & *p.* & producantur *CQ.* & *sq.* ad *R.* & *r.* Et ob similitudinem figurarum *CPRQ.* & *prq.* erit *RQ*, ad *rq*, ut *CP*, ad *sp*: adeoque in data ratione. Proinde, si vis, qua corpus *P* versus corpus *S*, atque adeo versus centrum intermedium *C*, attrahitur, esset ad vim qua corpus *p* versus centrum *s* attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *PR. pr.* ad arcus *PQ. pq.* per intervalla ipsis viribus proportionalia *RQ. rq.* adeoque vis posterior efficeret ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ similis esset curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit ut corpus *P* gyretur: & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*. *P* & *p*. & æqualitatem distantiarum *SP. sp.*) sibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus; & propterea ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq.* requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p*, esse ad velocitatem corporis *P*, in subduplicata ratione distantiæ *sp* ad distantiam *CP*, eo temporibus quæ sint in eadem subduplicata ratione describantur arcus *PQ. pq.* qui sunt in ratione integra, & inter se similes. Et corpora *P, p.* viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia *C* & *s* figuras similes *PQV. pqv.* quarum posterior

Prop. 4. prius.

pqv similis est & æqualis figuræ quam corpus *P* circum corpus mobile *S* describit. *Q.E.D.*

Casus (2.) Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio relativo in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum: & per motus legem 26. omnes motus in hoc spatio peragentur ut prius: adeoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius: easque propterea ipsi figuræ *pqv* similes & æquales. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Tempus periodicum circa corpus immobile *s*, erit tempore periodico circa mobile *S*, vel verius circa gravitatis centrum *C*, majus: idque in reciproca ratione angulorum simul descriptorum: hoc est, in subduplicata ratione radiorum *sp* & *CP*, hoc est, in subduplicata ratione summæ corporum $S + P$ ad corpus *S*. Sic si Luna *p* circa Tellurem immobilem *s* revolveretur ad eandem distantiam; & si quantitas materiæ in Luna poneretur tantum pars vigesima sexta quantitatis materiæ in terra; Tempus periodicum Lunæ majus esset tempore ejusdem periodico præsenti, in ratione numeri 27. ad numerum 26˪495. Sunt enim 27 : 26˪495 :: 26 ÷. Unde cum Tempus periodicum Lunæ sit jam $27^d. 7^h. 43'$. sive $39.343'$. Si circa Terram immobilem revolveret, Tempus periodicum esset $40.092'$. sive $27^d. 20^h. 12'$.

Coroll. (2.) Hinc corpora duo viribus distantiis suis directe proportionalibus se mutuo trahentia, describunt & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo Ellipses concentricas, & centra in virium centris habentes. Et vice versa; si tales figuræ circa Ellipseωn centra describantur, sunt vires centripetæ distantiis à centro directe proportionales.

Vid. Prop. 19. prius.

Coroll. (3.) Corpora duo viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus describunt, & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo Sectiones Conicas, umbi

Vid. Prop. 21. prius.

cos habentes in centro circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si Tales figuræ circa Sectionum Conicarum focum describantur, vires centripetæ sunt distantiarum quadratis reciproce proportionales.

Coroll. (4.) Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia radiis & ad centrum illud, & ad se mutuo ductis describunt areas temporibus proportionales; nimirum propter radiorum vel virium centripetarum ad ista centra perpetuam directionem. *Vid. Prop. 15, prius.*

Maij 14°. 1705.

XVIII.

XXIX. SI corpora duo *S* & *P* viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia revolvantur circa gravitatis centrum commune; Ellipseωs quam corpus alterutrum *P* hoc motu circa alterum *S* describit Axis Transversus, erit ad Axem transversum Ellipseωs quam corpus idem *P* circa alterum quiescens eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum $S + P$, ad primam duarum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum *S*. Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica per Propositionem postremam forent in subduplicata ratione corporis *S* ad summam Corporum $S + P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia. Ellipseωs autem axis transversus † minuetur in ratione cujus hæc subduplicata est sesquiplicata; id est in ratione *Vid. Fig. p. 164.* *Prop. 13. supra.*

one cujus ratio integra S ad $S + P$ eſt triplicata: adeoque ad axem tranſverſum Ellipſeωs alterius ut prima duarum medie proportionalium inter $S + P$, & S, ad $S + P$. Et inverſe Axis tranſverſus Ellipſeωs circa corpus mobile deſcriptæ, erit ad axem tranſverſum deſcriptæ circa immobile, ut $S + P$, ad primam duarum medie proportionalium inter $S + P$, & S. Q.E.D.

Sic ſi diſtantia Lunæ à Terra mediocris: hoc eſt, axis tranſverſi Ellipſeωs deſcriptæ ſemiſſis ex hypotheſi Terræ immobilis ſit 60. ſemidiametrorum terreſtrium, dato nempe tempore periodico; erit ex hypotheſi Terræ & Lunæ circum gravitatis centrum commune gyrantium diſtantia illa 60 ſemidiametris major, eaque in ratione ſummæ Terræ atque Lunæ, ad primam duarum medie proportionalium inter Terræ Lunæque ſummam & Terram. Sive ex Hypotheſi quod Luna ſit 26ª. pars terræ; ut 27. ad 26⌊665. Sunt enim 26 : 26⌊33 : 26⌊665 : 27 $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$. Unde cum diſtantia Lunæ in Hypotheſi terræ immobilis ponatur 60 ſemidiametrorum terreſtrium, erit revera ex ejuſdem motu $60\frac{1}{4}$ ſemidiam.

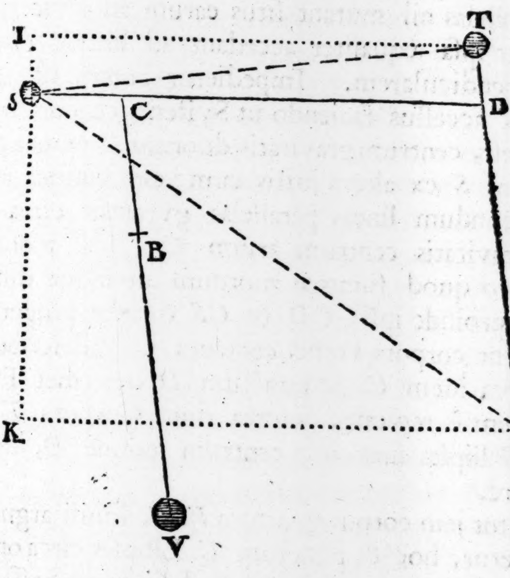
Corollarium. Ex nuperrime demonſtratis ſequitur, quod ſi Corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita quomodocunque moveantur, Motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traherentur. Et virium attrahentium eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora. Vires enim illæ quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium: & diſtantiæ à centro gravitatis ſunt diſtantiis corporum ubique proportionales: adeoque vires eædem ſunt & eadem ratione creſcunt vel decreſcunt, ac ſi à corpore intermedio in gravitatis centro manarent.

XXX. Corpora plura, quorum vires materiæ quantitati ſunt proportionales, & in directa diſtantiarum ra-

tione, moveri possunt in variis Ellipsibus circa earum centra: ita ut motus sine perturbatione perpetuo perseverent, & ut commune omnium gravitatis centrum nterea quiescat.

Ponantur imprimis corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Si motus projectilis debita proportione secundum lineas parallelas in eodem plano sitas, sed secundum directiones contrarias utrique semel imprimatur, describent hæc Ellipses similes, centra habentes in *D* communi duorum gravitatis centro, ut olim exposuimus. *Prop. 19. prius.*

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L*,



ribus acceleratricibus *ST*, *SL*. & ab ipsis vicissim hatur. Vis *ST* per legem motus 22. resolvi post in vires *SD*, *DT*. & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. ires autem *DT*, *DL*, quæ sunt ut ipsarum summa *L*: [cum enim rationes ipsarum partium *TD* & *L* eædem semper maneant, manebit & ratio totius

TL

TL in omnibus corporum *T* & *L* distantiis.] Et vires acceleratrices ipsorum corporum *T* & *L* sunt ut distantiæ *TL*. & vires adjectitiæ à corpore *S* oriundæ, & secundum lineam *TL* tendentes sunt, sicut jam vidimus, ut eædem distantiæ *TL*. Ergo summa virium *TD* & *LD* centrum gravitatis respicientes sunt ut distantiæ *DT* & *TL*. Sed viribus prioribus majores: adeoque efficient ut corpora illa describant Ellipses, aut prioribus similes motu celeriore, si motus projectilis pro vis centripetæ adjectitiæ ratione acceleretur; aut alterius speciei si motus iste projectilis maneat datus. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD* trahendo illa corpora æqualiter & secundum lineas *TI*, *LK* ipsi *DS* parallelas nil mutant situs earum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam *IK*, ipsi *SD* perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam *IK* accessus faciendo ut Systema corporum *T* & *L*; hoc est, centrum gravitatis duorum *D* ex una parte; & Corpus *S* ex altera justis cum velocitatibus in dato plano secundum lineas parallelas gyrentur circa commune gravitatis centrum trium *C*. Tali motu corpus *S* (eo quod summæ motuum utrinque distantiæ *SD*, & proinde ipsis *CD* & *CS* directe proportionales trahunt corpora versus centrum *C*:) describet Ellipsin circa idem *C*. & punctum *D* describet Ellipsin consimilem è regione; interea dum Corpora *T* & *L* pergant Ellipses suas circa centrum mobile *D*, ut prius describere.

Addatur jam corpus quartum *V*. & simili argumento concludetur, hoc & punctum *C* Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis *B* describere posse; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L*, & *S*, circa centra *D* & *C*, sed aliquantum acceleratis. Et eadem erit plurium ratio.

Coroll. (1.) Casus Systematis corporum circa alia corpora revolventium, ubi vires centripetæ sunt directe ut distantiæ, Ellipses exhibet nobis accuratas; nec ullo mo

modo per plurium corporum additionem perturbatas. Quo autem magis recedit Lex virium centripetarum ab hac lege, necesse est, cæteris paribus, ut eo magis corpora motus mutuos perturbent.

Coroll. (2.) Sin vires centripetæ sint reciproce ut distantiarum quadrata, & Systema corporum duorum pluriumve minorum circa commune gravitatis centrum in Ellipseos umbilico positum revolventium ad latus urgeatur à Corpore longe maximo, & satis remoto; ita ut commune omnium gravitatis centrum à centro corporis maximi non longe absit; commune Systematis corporum minorum gravitatis centrum Ellipsin circa corpus maximum, seu potius circa commune omnium gravitatis centrum describet. In motibus autem corporum minorum Inæqualitates haud paucæ orientur; quas in sequentibus explicabimus. Quales etiam in Luna nostra Astronomi observatis indubiis monstrarunt.

Coroll. (3.) Maxima autem omnium orietur in Systemate minore perturbatio, si corpus maximum omnes Systematis istius partes paribus distantiis inæqualiter attraheret: hoc est, si corporum variorum genera variis gradibus in Corpus maximum gravitarent; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major esset quam inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix æqualiter & secundum lineas parallelas agendo nil perturbet motus corporum inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur; majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum agendo in aliqua corpora, & non agendo in alia; aut saltem in alia agendo minus, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, si qua esset, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate necessario oritur, majorem redderet perturbationem totam.

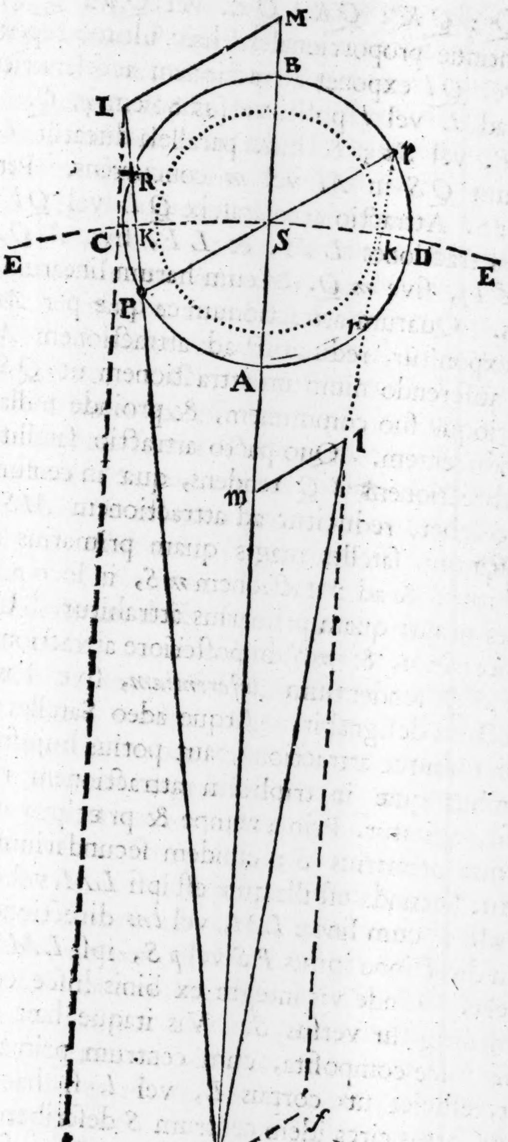
Coroll. (4.) Unde si Systematis minoris partes in Ellipsibus circa focum, vel in Circulis circa centrum sine alia motuum perturbatione quam quæ ex linearum à Cor-

Corpore maximo ductarum inclinatione & inæqualitate oriri debeat, moveantur, manifestum est quod vires acceleratrices omnium Systematis partium versus maximum sunt paribus distantiis æquales; & quod omnia corpora in Systemate minore comprehensa æqualiter in corpus maximum gravitant.

Coroll. (5.) Hinc etiam constat partes Systematis minoris aut à nullis aliis viribus acceleratricibus quam quæ ad corpus maximum tendunt, urgeri, nisi forte levissime & insensibiliter: aut saltem æqualiter, & secundum lineas parallelas urgeri quam proxime. Quæ omnia ad Systemata Terræ, & Lunæ; Jovis & Circumjovialium; Saturni & Circumsaturniorum, circa Solem gyrantia facile fuerit applicare: ut verbis pluribus haud opus esse videatur.

XXXI. Si Planeta primarius circa Solem revolvens secum deferat Satellitem, hic circa primarium ita movebitur ut à quadratura cum Sole ad conjunctionem aut oppositionem proxime insequentem acceleretur perpetuo; à syzygia vero ad quadraturam retardetur; adeoque prope syzygias Satelles velocius feretur, prope quadraturas vero tardius.

Sit $\underset{\smile}{Q}$ Sol, S Planeta primarius in orbe suo annuo ESE revolvens. P vel p Satelles orbitam suam menstruam $ADBC$ circa primarium describens: in qua orbita puncta A & B Syzygias cum Sole, hoc est, Conjunctionem & Oppositionem designent: C & D Quadraturas, hoc est, puncta per quadrantem circuli à syzygiis hinc inde distantia. Si porro $\underset{\smile}{Q}S$, vel $\underset{\smile}{Q}K$, vel $\underset{\smile}{Q}k$, mediocris distantia Satellitis à Sole, exponat attractionis acceleratricis quantitatem; qua nempe secundarius Planeta ad Solem tendit, ubi ad eandem atque primarius distantiam à Sole sit positus: Et locus Satellitis hujusce supponatur in P vel p in sua orbita: Sumatur in linea $P\underset{\smile}{Q}$ vel $p\underset{\smile}{Q}$, si opus est, producta, $\underset{\smile}{Q}L$ vel $\underset{\smile}{Q}l$, quæ sit at $\underset{\smile}{Q}K$, vel $\underset{\smile}{Q}k$, in duplicata ratione $\underset{\smile}{Q}K$, vel $\underset{\smile}{Q}k$, ad $\underset{\smile}{Q}P$, vel $\underset{\smile}{Q}p$. hoc est, ut


M
B
L
p
R
C
K
S
k
D
E
E
P
r
A
l
m
f
Q
F

sint $PQ : QK : QR : QL$. vel $Qp : Qk : Qr :$ Ql continue proportionales, hæc ultimo reperta linea QL, vel Ql exponet attractionem acceleratricem Satellitis ad L vel l positi versus Solem in Q. Jungatur SP. vel Sp; & huic parallela ducatur LM vel lm, cum QS in M vel m concurrens. Per motus legem 22. Attractio acceleratrix QL vel Ql resolvetur in attractiones LM, & LF, sive MQ: vel in lm, & lf, sive mQ. & cum harum linearum directionibus. Quarum attractionum ea quæ per MQ, vel mQ exponitur, reducitur ad attractionem MS, vel mS: auferendo nimirum attractionem ut QS satelliti primarioque suo communem, & proinde nullas anomalias inducentem. Quo pacto attractio satellitis secundum directionem SQ tendens, quæ in censum hic loci venire debet, reducitur ad attractionem MS, in loco P, quantum satelles magis quam primarius ad Solem attrahitur: & ad attractionem mS, in loco p, quantum satelles minus quam primarius attrahitur. Unde MS in priore casu, & mS in posteriore attractionum secundum SQ tendentium *differentiam*, sive Excessum & Defectum designabit. Atque adeo Satelles hoc pacto triplici ubique attractione, aut potius hujusmodi attractionibus quæ in triplicem attractionem rite resolvi possit, agitatur. Prima nempe & præcipua attractio illa est qua primarius S; eundem secundarium P, vel trahit. Secunda est illa quæ est ipsi LM, vel lm proportionalis; cum lineæ LM, vel lm directione: hoc est cum directione ipsius PS vel pS, ipsi LM vel lm parallelæ. Unde vis integra ex binis hisce composita etiam dirigitur versus S. Vis itaque hæc integra, ex binis hisce composita, cum centrum primarii S respiciat, efficiet ut corpus L, vel l, si hac sola agitaretur, areas circa idem centrum S describeret etiamnum temporibus proportionales: per Propositionem 1. Sed Satelles vi tertia etiam urgetur; quæ nempe est ut MS, vel mS, & cum directione ab M vel

ve

ersus *S*: hoc est, ab *L*, vel *l* versus *F*, vel *f*. Ni-irum in positione *P* satelles magis tendit ad Solem, uam primarius suus; atque id secundum directionem si *QS* parallelam excessu *MS*. Et in positione *p*, satel-s minus tendit ad Solem quam primarius, atque id se-ndum eandem directionem, ipsi *QS* parallelam, de-ctu *mS*. Quod eodem omnino redibit, ac si exces-m *MS*, ab *L*, versus *F*; & defectum *mS*, ab *f* ver-s *l*; sive excessum ab *M* versus *S*, & defectum ab versus *S* æstimemus: vel ac si satelles hinc inde Sole duplici ad partes oppositas simul utrinque op-sito perturbaretur. Ubi enim Primarius à secunda-o vero attractionis excessu versus Solem retrahitur, fectus iidem plane futuri sunt qui sequerentur omnes oad primarium & apud eum sensibiles, quales nunc um indagamus, si immoto primario secundarius ea-m attractionis differentia in partes à Sole opposita straheretur. Hæc autem vis tertia ex attractionum i *SQ* parallelarum differentia oriunda, cum ad cen-m *S* non tendat, neque vis integra ex tribus hisce mposita totalis, nempe illa qua Satelles revera ur-tur, ad centrum tendit. Quaprop- Satelles non describet areas cir- primarii centrum æquabiles, sive nporibus proportionales. Sed vis c per *MS*, vel *mS* exposita arearum descriptionem uabilem, sive temporibus proportionalem, perturba-. Nempe in semicirculi *CAD* quadrante *CA*, po-o motu menstruo per *A*. *D*. *B*. *C*. ab occidente in ntem peracto, motum Satellitis circa *S* à *C* versus factum conspirando accelerat: post Conjunctionem o in *A*, in quadrante *AD*, contrariando retardat. ellite autem ad quadraturam circa *D* pervento e-escit vis tertia *MS*, vel *mS*. (quoniam *QK*, *Qk*: *QP* vel *Qp*: ac proinde etiam & *QL*, vel *l* tunc æquales sunt.) Et proinde vis per illam ubi-expositæ nulli hic loci effectus esse possunt. Sa-tel-

Prop. 17 & 18. *prim.*

telles igitur circa quadraturas reliquis viribus, iisque solis ad centrum primarii tendentibus agitatus, areas per radium vectorem æquabiles, sive temporibus proportionales describet. Dum vero Satelles quadrantem *DB* peragrat, *Qm* deficit à *QS*: & si vires perturbantes ad satellitem solum referamus, tendent eæ ab *m*, versus *S*; & conspirando motum ejus iterum accelerabunt: Post oppositionem vero in *B*, tendent vires etiamnum ab *m*, versus *S*; & contrariando motum satellitis retardabunt: donec iterum circa quadraturam *C* evanescat *mS*, ejusque proinde effectus cessent. Rursus, cum vis *MS* vel *mS* areæ perturbatrix in transitu Satellitis à *C*, ad *A*: & à *D*, ad *B* perpetuo augeatur: & in *A* ac *B* sit maxima; & hinc rursus perpetuo diminuatur in transitu satellitis ab *A* ad *D*, & à *B* ad *C*, donec in punctis *D* & *C* evanescat; Patet Satellitis motum ex primario spectatum esse cæteris paribus velocissimum in Syzygiis, *A* & *B*: tardissimum in Quadraturis *C* & *D*. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc inæqualitatem istam in motu Lunari quam *Variationem* dicunt Astronomi solvere licebit: quia Luna ita in syzygiis velocius quam in quadraturis fertur, ut à syzygia ad octantem pergendo minuta prima quasi 35. lucretur ultra motum medium; & eandem quantitatem ob octante ad quadraturam pergendo iterum deperdat: atque ita perpetuo. Et consimilis anomalia in lunulis circumjovialibus & circumsaturniis est expectanda: quamquam ob majorem istarum Systematum à Sole & à nobis distantiam; & propter cursuum menstruorum tempora breviora vix aut ne vix quidem evadit sensibilis.

Coroll. (2.) Hinc etiam sequitur quod Orbita Satellitis cæteris paribus *curvior* erit in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Et proinde, si per se circularis, evadet aliquantulum Ellipticus, circa Primarium in centro positum: ita ut Axis Ellipseos minor in Syzygiis, & major in quadraturis perpetuo collocetur

locetur. Sin orbita sit per se Elliptica, circa primarium in foco positum, magis ad istam Figuram accedet quam si nulla hujusmodi anomalia afficeretur. Primus quod sciam Cartesius hujusmodi oblongam Figuram orbitæ Lunaris ex mera Hypothesi conjectura definivit: interea tamen mirum errorem erravit, dum Lunam in omnibus syzygiis ad terram propinquiorem, & in omnibus quadraturis remotiorem statueret: cum è contra per propriam orbitæ Lunaris eccentricitatem, positá apsidum linea circa syzygias, Luna sit in summa apside, quam in quadraturis à Terra remotior: non obstante hac inæqualitate de qua jam verba facimus. Primus autem hujusmodi oblongam Orbitæ Lunaris Figuram per observata vere animadvertit Acutissimus Halleius; aut saltem primus cum publico communicavit: & exinde Lunæ Theoriam primus emendandam esse ostendit. Quod vero ad Corollarii hujusce demonstrationem spectat, illud ex propositione hac facile deducitur. Corpora enim velociora minus deflectunt à recto tramite quam tardiora: & præterea, vis perturbatrix ut *MS*, vel *mS* in Conjunctione & Oppositione non solum est per se maxima, sed & directe contraria isti vi qua corpus centrale *S* trahit corpus *P*, vel *p*: adeoque vim illam contrariando minuit. Corpus autem *P* vel *p* minus deflectet à recto tramite, ubi minus urgetur in corpus centrale *S*; adeoque in orbita oblonga elliptica circa primarium feretur.

Maij 21. 1705.

XIX.

XXXII. SI ob diminutam & auctam per vices distantiam inter Solem & Planetam primarium actio Solis augeatur ac diminuatur per vices, augebitur

ſimul ac diminuetur orbitæ Satellitis radius; & Tempus periodicum Satellitis circa primarium per vices mutabitur; augebitur nimirum cum aucto radio; & diminuetur cum diminuto.

Vis qua primarius trahit Satellitem augetur cum Satelles eſt in quadraturis *C*, & *D*, per additionem vis *SP*, vel *Sp*: evaneſcente vi *SM*, vel *Sm*: & diminuitur cum Satelles eſt in ſyzygiis, per ablationem vis *SM*, vel *Sm*. Et quia vis *SM*, vel *Sm* in ſyzygiis eſt quaſi duplo major quam *SP*, vel *Sp* in quadraturis; ubi *R* vel *r* punctum cum puncto *B*, vel *A* fere coaleſcit; vis primarii attractiva magis quolibet menſe Synodico diminuetur quam augebitur: adeoque pro abſolute diminuta eſt omnino cenſenda. Aucta igitur circa Syſtematis Perihelion Solis vi, langueſcet magis vis attractiva primarii, & dilatabitur orbita: diminuta autem circa Syſtematis Aphelion Solis vi, invaleſcet magis vis primarii attractiva, & contrahetur orbita. Una autem cum orbita dilatata augebitur tempus Satellitis periodicum: & una cum contracta orbita diminuetur tempus periodicum: atque ita quotannis motus Satellitis medius erit major & minor per vices; & in mediocri à Sole diſtantia ſola vere medius eſt habendus.

Corollarium (1.) Hinc inæqualitatem illam in motu Lunari annuam quæ medium ejus motum ſpectat ſolvere licebit: qua nempe motus Lunæ medius exceſſu & defectu 12′. fere motum vere medium excedit, & ab eodem deficit per vices: excedit nempe in tranſitu telluris ab apſide ſumma ad diſtantiam mediocrem; deficit à diſtantia mediocri ad apſidem imam: & iterum deficit ab apſide ima ad mediocrem diſtantiam; & à mediocri diſtantia ad apſidem ſummam excedit iterum. Atque ita in perpetuum. Neque aliter de Circumjovialibus & Circumſaturniis eſt in ſua Proportione cenſendum. Quanquam hæc inæqualitas & reliquæ etiam in iſtis tantillæ ſunt ubique, ut fere negligi debeant.

Coroll

Coroll. (2.) Tempus periodicum Satellitis cujusvis vere originarium & primitivum, hoc est, quo primarium suum extra Solis vires positum circuitu integro pervolveret, paulo brevius est tempore periodico medio præsenti; & distantia originaria à primario suo paulo minor. Nempe si vires Solis, quæ jam semper vires primarii integro quovis cursu debilitant, tollerentur, appropinquaret satelles; & in minore distantia tempus brevius periodicum obtineret.

Coroll. (3.) Hinc etiam cum Cl. Gregorio inferre licet, quod si Primarius quivis Planeta novæ materiæ accessu evadat major, & inde ejus attractio in eadem ratione evadat major, Satelles in minori orbita & minore etiam tempore periodico revolveret. Similiter si primarius per ablationem materiæ diminuatur, Satelles in majori orbita, & majore etiam tempore periodico revolveret. Idemque respectu Primarii cujusque continget, si Sol ipse casu aliquo augeretur vel diminueretur.

Coroll. (4.) Cum itaque ex antiquissimis Astronomorum observatis cum nuperrimis collatis constet, tempora periodica primariorum circa Solem, & Lunæ, secundarii Planetæ, circa Terram esse eadem hoc seculo quæ ante annos bis mille fuerant, certum est tanto temporis spatio quantitatem materiæ tam in Sole quam in Terra æqualem fuisse; nec sensibili ullo augmento aut decremento obnoxiam.

Coroll. (5.) Sin quantitas materiæ in Terra è Diluvio Noetico aut aliunde aucta supponantur, Mensis periodici Lunaris quantitas ut tum temporis diminueretur erat necesse.

XXXIII. Si Planeta secundarius describat orbitam Ellipticam circa primarium in Ellipseωs foco positum, Hujus Ellipseωs Axis major, sive apsidum linea, quoad motum angularem progredietur & regredietur per vices: sed magis tamen progredietur: & in singulis satellitis revolutionibus per excessum progressionis feretur

in consequentia. In syzygiis nempe cum Sole progredietur; & in quadraturis regredietur.

Nam vis qua secundarius Planeta *P*, vel *p* urgetur in primarium suum circa quadraturas; ubi vis altera *MS*, vel *mS* evanuit, componitur ex vi *LM*, vel *lm* & vi centripeta corporis centralis *S*. Vis prior, si augeatur distantia aut diminuatur, augetur aut diminuitur in eadem fere ratione directe: ita ut in majori à primario distantia evadat major attractio versus centrum; & in minore minor. Vis autem posterior à Primario immediate orta in majori distantia evadit minor, & in minore major; estque semper in duplicata distantiæ ratione reciproce. Adeoque vis integra, sive *summa* virium versus primarii centrum ex distantia aucta decrescit in minore ratione quam est duplicata ratio distantiæ: hoc est, non tantum diminuitur in distantia majore, nec tantum augetur in distantia minore, quantum motus circa focum Ellipseωs immobilis requirit. In conjunctione vero & oppositione, vis qua satelles in primarium urgetur est *differentia* inter vim qua primarius trahit secundarium, & vim *KL*, vel *kl*: sive in hoc casu *SM*, vel *Sm*. Et differentia illa, propterea quod vis *SM*, vel *Sm* augetur quam proxime in ipsa distantiæ ratione directe, decrescit in majore quam duplicata ratione distantiæ; atque adeo major est in minore distantia, & minor in majore, quam quæ Ellipsi immobili describendæ sufficiat. Si autem vis centripeta decrescat in ratione plusquam duplicata distantiæ, ut fit circa syzygias, accedetur aliquantulum ad casum vis centripetæ decrescentis in triplicata ratione distantiæ, unde motus in spirali, sine ulla tangentis ad radium mutatione sequetur. Revolvet itaque satelles in Ellipsi quadam mobili, sive motus angularis major requiretur ut tangentes obliquæ ad radium evadant eidem perpendiculares; hoc est, ut satelles ad apsides suas perveniat, quam requireretur si vires essent in ipsa ratione distantiæ duplicata reciproce. Hoc est, apsidum linea progredietur

tur. Et, è contra, Si vis centripeta decreſcat in minore ratione quam diſtantiæ duplicata, ut ſit circa quadraturas, caſus contrarius ſequetur: & ſatellitis motus à motu per ſpiralem angulum radii & tangentis non mutantem diverſo orietur: Ita ut angulus iſte citius mutetur, & ad rectam pertingat citius quam pertingeret ſi vires eſſent in ipſa ratione diſtantiæ duplicata reciproce: Hoc eſt, Apſidum linea regredietur. In locis autem inter ſyzygias & quadraturas intermediis pendet motus apſidis ex cauſa utraque conjunctim: adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa, vel regrediatur. Unde cum vis KL, vel kl in Syzygiis, ut nuper notavimus, ſit quaſi duplo major quam vis LM, vel lm in quadraturis; exceſſus in tota quavis revolutione erit penes vim majorem KL, vel kl; transferetque apſidem ſingulis revolutionibus in conſequentia.

Coroll. (1.) Hinc inæqualitatem illam, ſive motum progreſſivum & regreſſivum apſidis Lunaris ſolvere licet, qua ita movetur apogæum ut in Syzygiis ſuis progrediatur celerius, & in quadraturis regrediatur tardius: & exceſſu motus progreſſivi ſupra regreſſivum quovis menſe feratur in conſequentia, gradus tres circiter. Atque ita integrum circulum annorum decem ſpatio, aut paulo citius percurrat. In circumjovialibus, quæ in circulis fere moventur, nullæ vel inſenſibiles dantur apſides, adeoque locum non habet præſens demonſtratio. In Circumſaturniis autem, ſicubi occurrat eccentricitas nonnulla, locum aliquem habebit; ſed propter temporum periodicorum parvitatem, ſi cum ingenti Solis diſtantia, viribuſque proinde ejuſdem perexiguis, & Saturni ipſius magnitudine comparetur, Apogæi mutatio tantilla erit, ut nullo modo à nobis obſervari queat, nedum ad examen & calculum reduci.

Coroll. (2.) Cum itaque pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus à decremento vis centripetæ, facto in majori vel minori quam duplicata ratione diſtantiæ SP, vel Sp in tranſitu corporis ab apſide ima ad apſidem

 ſum-

ſummam; ut & à ſimili incremento in reditu ad apſidem imam, atque adeo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſumma ad vim in apſide ima maxime recedit à duplicata ratione diſtantiarum inverſa, manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis per vim ablatitiam KL, ſeu $SM - LM$; vel $Sm - lm$ progredientur velocius: SP, vel Sp tum temporis omnium minima; & SM, vel Sm omnium maxima in ſyzygiis exiſtente; & SP, vel Sp; ſive potius earum utrinque ſumma, in quadraturis exiſtente omnium minima. Unde in ſingulis ſatellitis revolutionibus, dum apſides ſunt circa ſyzygias, illæ celerrime progredientur in ſatellitis ſyzygiis, & tardiſſime regredientur in Satellitis quadraturis: atque adeo exceſſus motus progreſſivi ſupra regreſſivum erit omnium maximus, & apſides in conſequentia celerrime movebuntur.

Coroll. (3.) Sin Apſides circa quadraturas ponantur, ex cauſis contrariis contrarii ſequentur effectus; & apſides tardius quam prius progredientur, dum ſatelles eſt in ſyzygiis; & velocius regredientur, dum ſatelles eſt in quadraturis: imo vero fieri poteſt, ubi apſides ſunt in quadraturis, ut particulari aliqua ſatellitis revolutione regreſſus apſidum in ſatellitis quadraturis, ſuperet earundem progreſſum in ejuſdem ſyzygiis. Sed quoniam cæteris paribus vis ablatitia SM, vel Sm apſidum progreſſum in ſyzygiis ſatellitis inducens, eſt quaſi duplo major quam vis adjectitia apſidum regreſſum in quadraturis ſatellitis inducens; & quoniam præterea apſides diutius hærent in ſyzygiis quam in quadraturis; quia illic in conſequentia latæ cum Sole progrediuntur atque adeo diutius eum quaſi comitantur; hic in antecedentia latæ Solis quadratum, in conſequentia latum citius tranſeunt; patet apſides velocius & diutius progredi in ſyzygiis ſuis, tardius vero & non tamdiu recedere in quadraturis ſuis; & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum in integra revolutione apſidum ad Solem, ſpatio nempe quaſi menſium tredecim, ferri etiamnum

co

consequentia. Sic sane in Orbita Lunari adeo inæqualiter apogæum ejus movetur, ut æquatione, ad gradus integros duodecim cum quadrante exsurgente, cohibenda sit, ut ex Tabulis Lunaribus discere licet.

XXXIV. Si Satelles in orbe eccentrico circa primarium suum moveatur, hujus orbis eccentricitas bis in quavis satellitis revolutione mutabitur, & in eadem revolutione erit hæc eccentricitas maxima cum satelles versatur in syzygiis cum Sole; minima vero cum sit in quadraturis: & per consequens eccentricitas in transitu satellitis à quadraturis ad syzygias perpetuo augebitur; &, è contra, in ejusdem transitu à syzygiis ad quadraturas perpetuo minuetur.

Cum enim ex ante demonstratis pateat quod vis centripeta versus primarium longe distantem nonnunquam decrescat in majori ratione quam distantiæ duplicata, nonnunquam in minore; & cum ex decremento in ipsa distantiæ ratione duplicata, eoque solo, motus satellitis in orbita immobili & datæ eccentricitatis sequatur; necesse est ut ex mutatione hujus rationis etiam orbitæ species mutetur. Sic sane, Ubi vires centripetæ, majori quam duplicata distantiæ auctæ ratione decrescunt; vel, quod eodem redit, ubi crescunt in majori quam duplicata distantiæ diminutæ ratione, Manifestum est quod satelles in descensu ab apside summa ad imam, perpetuo accessu vis illius novæ impulsus semper in centrum, magis verget in hoc centrum quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ: adeoque orbem describet orbe elliptico priore interiorem, & in apside ima propius accedet ad centrum quam prius. Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis eccentricus. Si jam vis in recessu satellitis ab apside ima ad summam decresceret iisdem gradibus quibus antea creverat, rediret satelles ad distantiam priorem; manente eccentricitate nuperrime obtenta. Sin vis decrescat in majori ratione quam prius creverat, satelles jam minus attractus ascendet ad distantiam majorem;

rem; & ſic orbis eccentricitas adhuc magis augebitur.

Similiter prorſus, Si ſatelles in deſcenſu ſuo ab apſide ſumma urgeatur vi quæ augetur minus quam pro duplicata ratione diſtantiæ diminutæ, patet ſatellitem illum deſcripturum orbem orbe elliptico prius deſcripto, (ubi nempe vis centripeta erat reciproce ut diſtantiæ quadratum,) exteriorem, atque proinde minus eccentricum; & eccentricitatem hanc adhuc minui ſi in corporis aſcenſu vis centripeta decreſcat minus ſive tardius quam ante creverat. Si igitur ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper eccentricitas; & è contra diminuetur eadem ubi ratio illa decreſcat. Cum itaque in quavis ſatellitis revolutione vis iſta in ejuſdem ſyzygiis decreſcat in majori ratione quam duplicata diſtantiæ auctæ; & in ejuſdem quadraturis in minori; prout ex ante dictis liquet; manifeſtum eſt circa ſatellitis ſyzygias eccentricitatem orbitæ deſcriptæ augeri perpetuo, & circa quadraturas diminui. Et cum in pluribus revolutionibus inter ſe comparatis maxima ſit decrementi ratio in apſidum ſyzygiis, minima in earundem quadraturis, manifeſtum quoque eſt eccentricitatem orbitæ maximam eſſe ubi apſides ſunt in ſyzygiis: minimam vero ubi apſides ſunt in quadraturis: atque adeo eccentricitatem diminui perpetuo in tranſitu apſidum à ſyzygiis ad quadraturam Solis; augeri vero perpetuo in tranſitu earundem à quadraturis ad ſyzygias.

Corollarium. Hinc Orbitæ Lunaris eccentricitatem diverſam, & indies mutabilem; majorem nempe, cæteris paribus, in Lunæ conjunctione & oppoſitione, minorem in quadraturis; creſcentem etiam in tranſitu apogæi Lunaris ab oppoſitione vel conjunctione ad quadraturas; decreſcentem in ejuſdem à quadraturis ad oppoſitionem vel conjunctionem tranſitu, ſolvere licebit. Tanta vero apud tabulas Aſtronomicas ſtatuitur hujus eccentricitatis diverſitas, ut diſtantia inter focum & centrum Ellipſeos à Luna deſcriptæ, quam ejus orbitæ

eccentricitatem dicimus, nunc sit $\frac{66.782}{1.000.000}$ nunc solum $\frac{43.319}{1.000.000}$. si nimirum cum distantia Lunæ mediocri partium 1.000.000 comparetur. Atque adeo ut ista eccentricitatum differentia ultra totius eccentricitatis minimæ semissem assurgere deprehendatur. Verum de hac re impræsentiarum satis. Plura Termino Autumnali expectabitis.

Junij 4°. 1705.

XX.

XXXV. SI Satelles circa primarium revolvatur in orbe cujus planum ad planum orbis primarii circa Solem inclinatum fuerit, linea nodorum motu angulari movebitur in antecedentia, sive regredietur; at velocitate inæquali: celerrime quidem ubi nodi sunt in quadraturis; postea gradatim tardius, donec, nodis in syzygiis constitutis, prorsus quiescat. In locis inter quadraturas & syzygias intermediis nodi, conditionis utriusque participes, recedent tardius; adeoque semper vel retrogradi, vel stationarii, singulis satellitis revolutionibus ferentur in antecedentia. Et in eadem Satellitis revolutione celerius regredientur cæteris paribus, cum Satelles est in syzygiis, quam cum sit in aliis locis.

Ex viribus enim perturbatricibus, de quibus toties diximus, vis *LM*, vel *lm*, ipsi *SP*, vel *Sp* in plano orbitæ satellitis semper sitæ parallela, nullam plani orbitæ mutationem inducere potest. Vis etiam altera *MS*, vel *m S*, in plano eclipticæ sita, ubi nodi sunt in syzygiis etiam in orbitæ plano posita erit, utpote in communi utriusque plani intersectione tum temporis posita. At vero ubi nodi non sunt in syzygiis, vis hæc

po-

posterior & major in eclipticæ plano semper sita, in plano orbitæ non erit posita; atque adeo motum satellitis in latitudinem afficiet lineamque nodorum in antecedentia remeare coget. Ponantur nimirum nodi in quadraturis positi, & vis hæc posterior plano eclipticæ parallelωs agens satellitem, nodos in utramvis partem transeuntem, & in plano orbitæ suæ perrecturum, ab isto plano perpetuo retrahet; ita ut locus intersectionis proxime futuræ à plani prioris intersectione distet versus antecedentia. Ubi autem nodi sunt inter syzygias & quadraturas, vis hæc posterior nunc nodos in consequentia, nunc in antecedentia cedere coget; semper autem in integro Satellitis circuitu excessu virium in antecedentia regredi coget; unde in nodorum syzygiis manebunt illi immobiles: in eorundem quadraturis celerrime retrocedent: & in locis intermediis conditionis utriusque participes recedent tardius; adeoque semper vel retrogradi, vel stationarii, singulis revolutionibus ferentur in antecedentia. Notandum autem, orbita extra syzygias & quadraturas posita, dum satelles à nodo ascendente ad descendentem, vel à descendente ad ascendentem pergit, nodos tardius regredi quamdiu vis *MS*, vel *mS* plagam istam respicit plani ad quam satelles positus est; & tamdiu progredi quamdiu vis ista plagam oppositam respicit. Sic posita nodorum linea in octante Solis, post situm ejus in quadraturis, sive circa *R*, & *r*, Satelles planum eclipticæ supergressus circa *R* plagam solarem respicit; sed vis perturbatrix ab *R* ad quadraturam *C* tendit ad partes contrarias, per circuli nimirum octantem, deinde evanescente in quadratura vi perturbatrice, post eandem incipit vis versus Solem tendens; atque per tres reliquos octantes manet: ita ut orbitæ mobilis nodorum linea primum progrediatur paululum, deinde paulo plus regrediatur; atque consimiliter in altero semicirculo: donec, nodorum linea syzygias appellente, progressus & regressus sint inter se fere æquales: utrique vero ob situm plani

orbitæ

rbitæ jam cum directione vis perturbatricis quasi coincidente, perexigui, & illico cessaturi. Quod vero n eadem Satellitis revolutione nodi celerius regrediuntur, cæteris paribus cum Satelles est in syzygiis quam libi, palam est, propter vim perturbatricem eo loci majorem; atque adeo majorem effectum sortituram.

XXXVI. Iisdem positis, Inclinatio vel angulus acutus plani orbis satellitis ad planum eclipticæ perpetuo mutatur; & maxima est, cum nodi sunt in syzygiis cum Sole: minima vero, cæteris paribus, cum nodi sunt in quadraturis. Minuitur autem dicta inclinatio in transitu Satellitis à quadraturis ad syzygias; augeturque in transitu ejusdem à syzygiis ad quadraturas. Unde fit t, Satellite in syzygiis existente, inclinatio planorum evadat minima; redeatque ad priorem magnitudinem circiter ubi Satelles ad nodum proximum accedit. Et n transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas diminuitur hæc planorum inclinatio, & fit omnium minima, cæteris paribus, ubi nodi sunt in quadraturis: dein crescit inclinatio iisdem gradibus quibus antea decreverat: nodisque ad syzygias denuo reversis ad priorem magnitudinem redit.

Si prior propositio recte fuerit intellecta, hæc particulari explicatione minus indigebit. Sicut enim corpore b *L* ad *F* motu priori pergente, Si accedat vis attrahens lineæ *LM* parallela versus partes ipsius *M*, per lineam *LM* exposita, perget corpus in diagonali *LQ*, & angulus inclinationis *MLQ* erit priore inclinationis angulo *MLF* minor. Vel etiam, Sicut corpore ab *L* ad *F* motu proprio pergente, Si accedat similis vis attrahens lineæ eidem *LM* parallela versus contrarias partes, per lineam æqualem exposita, perget corpus in diagonali altera; & angulus esset major angulo priore. Ita in casu nostro fieri debet, ut simul cum nodorum motu plani oscillatio sequatur. Ubi enim nodi sunt in quadraturis satellitem de plano orbis sui perpetuo detrahendo, minuit inclinatio-

nationem plani in transitu satellitis à quadraturis ad syzygias: augetque vicissim eandem in ejusdem transitu à syzygiis ad quadraturas: unde fit ut, satellite in syzygiis existente, inclinatio evadat omnium minima; redeatque ad priorem magnitudinem circiter ubi satelles ad nodum proximum accedit. At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, hoc est, circa *P* & *p*, intelligetur ex modo expositis quod in transitu satellitis à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per 45. gradus usque ad quadraturam proximam inclinatio augetur; & postea denuo in transitu per alios 45 gradus usque ad nodum proximum diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur; & propterea minor est semper in nodo subsequente, quam in præcedente. Et simili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi nodi sunt in octantibus alteris, circa *R* & *r*. Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis satellitis ad nodos appulsibus diminuitur; fitque omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis, & satelles in syzygiis: deinde crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat; nodisque ad syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur. *Q. E. D.*

Corollarium. Ex hac & superiori Propositione solvuntur notissima illa Astronomiæ Lunaris phænomena quibus nodi gradus $19\frac{1}{3}$ circiter annuatim regrediuntur; atque orbitæ Lunaris inclinatio est ita mutabilis ut cum nodi sunt in quadraturis angulus inclinationis sit $4^\circ.\ 59', 35''.$ tantum; cum vero sunt in syzygiis ad $5^\circ.\ 17'.\ 20''.$ circiter assurgere deprehendatur.

XXXVII. Omnes inæqualitates in motibus satellitum circa primarios suos revolventium paulo majores sunt in conjunctione satellitis cum sole, quam in ejusdem oppositione.

Cum enim QS, majorem habeat rationem ad QA, uam QB, habet ad QS, propter SA, SB, cæteris aribus, æquales; & QS majorem quam QA; erit ratio duplicata QM, ad QS, adhuc major quam uplicata QS, ad Qm. Atque adeo differentia MS ajor differentia mS; & LM major quam lm. Unde fectus ab iſtis viribus derivati erunt majores quam qui alteris derivantur. *Q.E.D.*

Notandum autem diſtantiam Solis à Terra tam inntem eſſe ut differentia virium circa conjunctionem unæ cum Sole, & circa ejuſdem oppoſitionem admoim ſit parva, & vixdum per obſervata diſtinguenda. nde nullum locum huic differentiæ diſtinguendæ ctenus datum eſſe ab Aſtronomis mirari non debeus.

XXXVIII. Vires Solis abſolutæ ſatellitum perturtrices earumque effectus in diverſis à Sole diſtantiis nt in diſtantiarum ratione triplicata inverſe.

Sit enim diſtantia Solis à ſatellite variata: & ſit adius orbitæ ſatellitis ad alterum radium in eam ratione. Erit tum ubique diſtantia ſatellitis à imario ad diſtantiam Solis in data ratione: unde hac hypotheſi vires abſolutæ perturbatrices eſſent vires abſolutæ Solis, ſive in duplicata illa ratione. oc obtinuiſſet ſi ſyſtematis ſecundarii radius eadem ione creviſſet aut decreviſſet atque ipſa Solis diſtan- creverat aut decreverat: ita ut eadem eſſet ad incem ratio quæ prius. Sed cum radius nullatenus deſcat accedente Sole, nec augeatur recedente, ratio a duplicata erit iterum augenda ratione altera ipſius ſtantiæ ſatellitis à primario. Unde integra ratio mpoſita erit prioris triplicata. *Q.E.D.*

Exempli gratia; ſupponatur Sol duplo quam prius lluri propior, ſive ut 50 ad 100. Et ſit AB meter æqualis partibus duabus, erit vis abſolutæ lis quantitas ad S in diſtantia minore, quadrupla quan-

quantitatis vis ejusdem in distantia majore. Sed
vis *SM* in distantia minore erit ejusdem vis in di
stantia majore quasi octupla. Est enim 49 × 49 =
2401; & 50 × 50 = 2500. Unde 2500 − 2401
= 99. Et 99 × 99 = 9801; & 100 × 100 = 10.000
Unde 10.000 — 9.801 = 199. Ergo differentia vi
rium absolutarum est fere in ratione dupla, sive u
199 ad 99. Et ipsæ vires absolutæ mediocres sunt i
ratione quadrupla, sive ut 4 ad 1. Ergo vire
perturbatrices integræ ex istis compositæ sunt ut 4 ×
2 = 8 ad 1 × 1 = 1. sive in ratione distantiæ re
ciproca triplicata fere. Et cum diameter apparens So
lis sit tantum non in ratione distantiæ reciproca, & vir
corporis centralis fere eædem, vires Solis satellitis pertu
batrices, earumque effectus erunt in triplicata diamet
Solis apparentis ratione directa quam proxime.

Scholium (1.) Eodem plane modo quo Sol extra sa
tellitis cujusvis Orbitam constitutus ejus motum per
turbat, Planetæ superiores inferiorum; Cometæ om
nium Planetarum motus perturbabunt. Et actione
Planetarum vel Cometarum in alios Planetas similes pro
ducent effectus, utut longe minores; propter illoru
corpora parva, si cum Sole conferantur, & distanti
immensas. Aliqui tamen erunt hi effectus; [imo
inferiorum quoque Planetarum in superiores:] qui qu
dem si perstent, & in eandem plerumque plagam dir
gantur, sensibiles tandem evadent. Exempli gratia, O
bitæ Telluris Apsides post plures annos sensibiliter
consequentia latæ deprehendi possent, licet admodu
parvus hic motus sit oportet, si conferatur cum apsidu
Lunæ motu in easdem partes. Sic sane ipsa Orbitæ T
restris eccentricitas alicui mutationi ut obnoxia sit opo
tet; sed tantillæ sane ut vix aut ne vix quidem ex a
quo phænomeno colligi posset.

Scholium (2.) Sic quoque Planetæ superiores alien
rum satellitum motus sensibiliter perturbabunt, si gr
des sint, & si circa mutuam è Sole conjunctionem d

hærea

ereant, in minima nempe tum temporis distantia constituti. Sic sane Actio Jovis in Saturni satellites, & turni in Jovis satellites, posita nimirum mutua omum Planetarum in se invicem pro materiæ quantitate avitate, quam olim probabimus, nullatenus erit conmnenda: ubi nempe è Sole quasi conjuncti cernuntur. nt enim in se corpora ingentia, & tellure nostra mulvicibus majora, & satis tum propinqua, ut vires perrbatrices evadant sensibiles. Et revera esse sensibiles observatis Astronomicis olim demonstrabitur.

Scholium (3.) Virium autem perturbatricium quantites è Sole in systema Saturnium vel Joviale redundanex quantitate virium in Lunæ nostræ anomaliis notismarum facile derivare licet. Ex Notis enim distanrum Telluris, Jovis, & Saturni à Sole rationibus; Notis in Luna virium harum effectibus, ex certa adam causarum & effectuum consimilium utrinque oportione à Newtono observata effectus harum vium etiam apud Jovem & Saturnum satis facile deminari possunt.

XXXIX. *Problema*. Invenire rationem inter vires ibus satellitis motus perturbatur à Sole, & vim qua elles in orbe suo circa primarium retinetur, quæ gratas in primarium dici debet.

Est enim vis perturbatrix integra ex viribus perturricibus LM, vel lm, & SM, vel Sm compoa: est etiam, propter ingentem Solis distantiam, linea Q, vel lQ ipsi lineæ MQ fere parallela; atque a- o vis LM vel lm mediocri suæ quantitati, sive sallitis radio SP, vel Sp est quam proxime æqualis: propter ingentem etiam Solis distantiam SM, vel m, sive LP, vel lp æquales sunt triplæ lineæ KP kp. Unde cum in triangulo SKP, vel Skp rengulo ad K, vel k angulus KSP, vel kSp sit dintia satellitis à quadratura; & latus KP, vel kp, ad radium SP, vel Sp sinus rectus; erit vis perbatrix SM, vel Sm, ad vim perturbatricem LM, vel

vel lm, ut radius, ad triplum ſinum rectum diſtantiæ ſatel-
litis à quadratura proxima. Unde ſi ratio vis perturbatricis SP, vel Sp ad vim primarii centripetam, ſive ad vim gravitatis ſolum innoteſceret, vis perturbatrix SM, vel Sm facile innoteſceret. Quam itaque hac methodo inveſtigamus. Vis perturbatrix SP, vel Sp, eſt ad vim centripetam primarii in Solem, ut linea SP, vel Sp, ad lineam SQ; ſive ut diſtantia ſatellitis à primario, ad diſtantiam Solis ab eodem primario. Vis autem centripeta primarii in Solem, eſt ad vim centripetam ſecundarii in Primarium, ut temporum periodicorum quadrata, ducta in circulorum radios: Sive ut SQ, ad SP, vel Sp; & ut temporum periodicorum quadrata ſimul. Unde ex æquo vis perturbatricis quantitas, erit ad vim gravitatis, (ratione priori SP, vel Sp ad SQ, rationem alteram reciprocam SQ ad SP, vel Sp perimente,) ut temporum Periodicorum quadrata. *Q. E. D.*

Corollarium (1.) Cum itaque tempus periodicum Lunæ ſit 39.343′. & tempus periodicum Terræ circa Solem 525.969′. Erit vis perturbatrix SP ad vim gravitatis verſus Terram apud Lunam, ut 39.343′ × 39.343′, ad 525.969′ × 525.969′: Hoc eſt, ut 1.547.871.649 ad 276.643.388.961 ſive, ut 1 ad 178$\frac{11}{15}$. Et cum vis SM, vel Sm in maxima ſua quantitate, ſive in ſyzygiis, ſit ad vim priorem ut 3 ad 1, erit vis SM, vel Sm in ſyzygiis ad vim gravitatis, ut 3, ad 178$\frac{11}{15}$. ſive ut 1, ad 59$\frac{9}{15}$. Eſt ergo vis iſta perturbatrix Solis SM vel Sm in ſyzygiis quaſi pars ſexageſima totius vis gravitatis Lunæ verſus terram. Sive potius, dempta vi SP, vel Sp in hoc caſu à vi SM, vel Sm, ut fieri poteſt, erit vis integra perturbatrix in ſyzygiis, ad vim gravitatis ut 1 ad 89$\frac{5}{15}$. ſive pars ejuſdem fere nonageſima. Et in locis aliis erit vis SM, vel Sm, ad vim gravitatis (poſito ſinu toto unitati æquali,) ut triplus ſinus rectus diſtantiæ à quadratura proxima, ad 178$\frac{11}{15}$.

XL. Si corpora plura fluida, aut diversa, aut in unum fluidum coalescentia circa Planetam primarium moveantur, singulæ fluidi partes motus suos ad legem satellitis peragendo propius accedent ad primarium cæteris paribus, & celerius movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & Primarii, quam in quadraturis. Et Nodi annuli hujus, seu interfectiones ejus cum eclipticæ plano quiescent in syzygiis. Extra syzygias vero movebuntur in antecedentia; & velocissime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur; & axis ejus singulis revolutionibus menstruis oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit; nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur. Hæc omnia ex uper demonstratis sua quasi sponte sequuntur: atque deo peculiari demonstratione minime indigent.

Corollarium. Hinc Annuli Saturnii phænomena nonulla, modo fluidum sit, facile possunt intelligi. Imo ero, si solidum sit, ejusdem cum Ecliptica interfectioes sive Nodi quiescent in syzygiis suis, ubi nempe ol in ipso annuli plano æque ac in eclipticæ plano repetur. Extra syzygias autem regredientur: & celerrie quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli uoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis circa olem revolutionibus nutando bis inclinabitur in eclipam, & bis redibit ad positionem priorem, nisi quaus per præcessionem nodorum circumfertur. Ut ex e dictis est apertissimum.

XLI. Si fluidum in alveo per superficiem cujusvis anetæ sive primarii sive secundarii excavato contineatr, & una cum planeta suo motu periodico diurno uniter revolvatur; partes singulæ hujus fluidi per vi acceleratæ & retardatæ in syzygiis suis, sive in meie & media nocte, velociores erunt; in quadraturis, e hora sexta matutina & vespertina, tardiores quam superficies globi contigua; & sic fluet in alveo, refluet per vices perpetuo. Ab inæquabili enim Solis at-

O tracti-

one turbabitur fluidum, eo quod major erit attractio partium propiorum, minor ea remotiorum, vis autem LM, vel lm trahet fluidum deorsum in quadraturis, sive ad horam sextam matutinam & vespertinam; faciet que ipsius partes ibidem locatas descendere usque ad syzygias, sive ad Meridiem & Mediam noctem, & vis SM, vel Sm trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus: & faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas; atque ita perpetuo.

Corollarium. Hinc fluxus & refluxus maris causam discimus. Si nimirum Lunæ æque ac Solis vires perturbatrices agnoscamus; & quæ ante demonstrata sunt huic casui rite applicemus. Sed notissimum hoc atque maxime stupendum hactenus naturæ miraculum fusius & distinctius erit posthæc pertractandum: Eo itaque Lectorem remittimus.

Octob. 22°. 1705.

XXI.

XLII. SI globo perfecte sphærico ad partes æquatoris circumaddatur annulus adjectitius solidus; e demq; adhæreat; Cessabit quidem motus fluendi & refluendi: Sed Oscillatorius ille inclinationis motus, & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo; gyrosque compleat iisdem temporibus & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat, & participando motum ejus compages utriusque oscillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo t

Retinet Globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem. Atque hac ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas. Dein maximus reclinationis motus in syzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem est ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta Polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus.

Coroll. (1.) Eadem ratione qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo ut per hujus incrementum augeatur iste regressus, per diminutionem vero diminuatur, & per ablationem tollatur; si materia plusquam redundans tollatur, aut, quod eodem recidit, si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel ratior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Coroll. (2.) Hinc etiam vicissim ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum, si globus polos eosdem constanter servet, & motus fiat in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat. Si in consequentia, deficit. Ponamus globum uniformem, & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque in superficiem facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm quam in alium quemvis, perspicuum est quod is axem suum, axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa superficiei parte qua prius, impulsu quocunque novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulsus successive impressi eundem

producent motum, ac si simul impressi fuissent: hoc est, eundem, ac si globus, vi simplici ex utroque impulsu composita, fuisset impulsus; atque adeo simplicem circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absque primo generaret; atq; adeo impulsuum factorũ in loca quæcunque. Generabunt hi eundem motum circularem, ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorũ motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos; sed impressos omnes componit, & ad unum reducit: & quatenus in se est gyratur semper motu simplici & uniformi, circa axem unicum inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta versus corpus extraneum quodvis tendens inclinationem axis aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque per centrum suum, & centrum in quod vis dirigitur transeunte dividi intelligatur in duo hæmisphæria, urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc perpetuo conatu recedendi à centro sui motus turbabit motum globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas nisi locando montem illum vel in polo alterutro; qui in casu, ut prius dictum, Nodi æquatoris progredientur vel in æquatore; qua ratione, per prius etiam dicta Nodi regredientur: vel denique altera axis parte addendo materiam novam qua mons inter movendum libretur: Et hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt polo vel æquatori propiores.

Coroll. (3.) Cum itaque constet ex observatis Astro-omicis, quod Nodi æquatoris terrestris quotannis re-rediantur per 50″ fere; qui quidem regressus *æquino-tiorum præcessio* audit; sequitur partes telluris æquato-eas esse partibus polaribus altiores. Et vicissim, cum x diurno telluris motu, ut inferius explicabitur, tellu-is figura sit oblatæ sphæroidis, partibus polaribus præ quatoreis depressis, liquet exinde æquatoris nodos re-redi debere quotannis.

Coroll. (4.) Ex prius dictis liquet etiam axem tellu-s oscillari quotannis, & in quavis revolutione annua utando bis in eclipticam inclinari, & bis redire ad posi-onem priorem. Liquet etiam maximum decrescentis clinationis plani æquatorei & ecliptici motum fieri in uadraturis nodorum, sive in solstitiis utrisque; & mi-mum inclinationis angulum in octantibus post quadra-ras, sive circa medios Leonis & Aquarii gradus: dein-e maximum esse inclinationis motum in syzygiis nodo-m, sive in æquinoctiis, & maximum inclinationis angu-m in octantibus proximis, sive circa medios Tauri & orpii gradus. Sed propter parvitatem horum motuum nnino insensibiles erunt hujusmodi effectus; nec ullis servatis Astronomicis deprehendendi. Notandum tem hisce contrarios effectus telluri nostræ, modo rtes æquatoreæ polaribus essent depressiores, tribuen-s fuisse.

Coroll. (5.) Hinc ultro corruit à Cl. Gregorio ex-gitatum effugium quasi Paralaxis annua Stellarum arum à Cl. Flamstedio toties reperta infirmo nitere-r fundamento: & quasi nec distantiam fixarum ob-vatarum, nec ipsius telluris motum annuum exinde o certo concludere liceret. Quin agamus igitur; & st prolata ipsa dubitantis & cavillantis Gregorii verba arenam cum Viro Clarissimo paulisper scendamus. Methodum hanc fixarum rallaxin observandi Flamstedianam olim positam dedimus: nec actum itaque iterum agemus.

Prælect. Astronom. p. 33, &c.

Ex hac autem methodo rite intellecta omnino liquet, ſtellam, verbi gratia, polarem à polo mundi, ſive æquatoris Boreo circa ſolſtitium æſtivum quam circa hyemale diſtare magis; idque ſpatio admodum ſenſibili, nimirum 40″ aut 45″. Unde concludit Flamſtedius & dari revera Telluris motum annuum circa Solem, & fixas parallaxi annuæ ſatis ſenſibili eſſe obnoxias: earumque proinde diſtantias exinde colligi poſſe. Quid hic Gregorius? Num negat Stellam e. g. polarem magis à Polo Mundi Boreo diſtare circa ſolſtitium æſtivum quam brumale? Minime ſane. Num Axis Telluris Nutationem illam perexiguam, qua inclinationem eclipticæ & æquatoris ad ſolſtitia minui, ad æquinoctia augeri cum Flamſtedio ſupponit, hallucinationis cauſam opinatur? Nequaquam. Oſtenderat nimirum Flamſtedius hanc Nutationem perexiguam confirmare potius quam infirmare ſententiam ſuam. Quid

Pag. 275. ergo ſibi vult Vir Doctiſſimus. "Methodus hæc, inquit ille, fixæ parallaxin "determinandi ſupponit Telluris axem ſibi exactiſſime "eſſe parallelum: cum hæc in oppoſitis punctis ſuæ "orbitæ verſatur quando obſervationes inſtituuntur. Quidni ſupponat, aut exactiſſime, aut propoſito ſuo ſatis exacte ſibi ſemper parallelum? "Licet, pergit Gre-"gorius, Axis Nutatio iſta exigua, de qua nuperrime "diximus, obſervationi Flamſtedianæ minime obſtet, "Alia tamen aliunde orta Nutatio totam hanc ſtellæ "polaris à polo diſtantiæ diverſitatem producere pote-"rit. Si nimirum hæmiſphærii terræ auſtralis paulo "major ſit denſitas quam hæmiſphærii borealis (vel "propter minorem illi æſtatem quam huic, majuſque "frigus; vel propter continentium terræ ad polos po-"ſitorum inæqualitatem, vel aliam cauſam quandam "nobis ignotam,) cum in ſolſtitio hyemali Polus Au-"ſtrinus annuat ad Solem, & ſimul illi propior ſi[t] "quam eſt polus Boreus: cumque tempore Solſtitii æ-"ſtivi hic ad Solem annuit, inclinabitur axis terræ ma-

"gi

"gis ad eclipticæ planum tempore hyemali quam æsti-
"vali, Angulus quo distat stella polaris à Polo minor
"esset in solstitio hyemali, quam in æstivo, licet stella
"polaris esset ad distantiam infinitam posita, & lineæ ab
"eadem ad orbem magnum ductæ pro parallelis haberi
"possent. Cum igitur totum quod per D. Flamstedii
"observationem conficitur illud sit, quod distantia an-
"gularis apparens stellæ polaris à polo in solstitio hye-
"mali quam æstivo minor sit, atque hoc ex duplici
"causa oriri possit, nempe ex rectarum à tellure in di-
"verso suo situ ad Stellam polarem concursu ad stellam
"polarem, si terræ axis in observationum una paralle-
"lus sit eidem in altera; Quod à Flamstedio supponi-
"tur: Vel ex rectarum cum terræ axe in diverso suo
"situ coincidentium consursu ad partes contrarias; po-
"sita stella polari infinite distante; ex observatione illa
"fixarum parallaxis non evincitur. Quoniam observa-
"tio integra consistere potest, rectis à diversis telluris
"locis ad stellam polarem infinite distantem ductis pa-
"rallelis manentibus; hoc est, Orbis magni parallaxi
"posita nulla. Imo hæc observatio, sic ait Gregorius,
"ne vel Telluris motum annuum immediate astruit.
"Nam licet Tellus in medio maneat, (circa axem, ut
"in Systemate semi-Tychonico, rotata cælestium motum
"diurnum apparentem efficiens,) Sol in signis australi-
"bus hemisphærium Terræ australe propius, & forte
"densius Soli tum obversum ita attrahere poterit, ut
"distantia stellæ polaris à polo in solstitio brumali mi-
"nor sit quam distantia eadem cum in Signis borealibus
"Sol remotior ejus hemisphærium boreale etiam forte
"minus densum minus attrahit. Hactenus D. Gregorius.
Et similem effugiendi rationem quoad reliqua Flam-
stedii atque Hookii observata eodem spectantia commi-
niscitur. Sed Respondeo:

(1.) Quod ad causas hujus Titubationis axis telluris
assignatas, minorem nempe hæmisphærii australis æsta-
tem, majusque frigus, aut continentium polarium in-

æqualitatem ſpectat; ſi Vir Cl. denſitatem hæmiſphærii auſtralis præ boreali tantam quanta movendæ per tot minuta ſecunda telluris poſitioni ſufficiat, ex his cauſis arceſſere velit, idem omnino agit ac ſi Caucaſum vecte è loco ſuo dimovere conetur. Demiror ſane Viri doctiſſimi in hac re ἀγεωμετρησίαν, quod cauſarum tantillarum vires & quantitatem non prius aliquo modo æſtimare voluerit, quam tantis effectibus pares ſtatueret. Laudo tamen Viri Cl. prudentiam quod addiderit, *vel propter aliam cauſam quandam nobis ignotam*: Probe enim ſciebat cauſæ ignotæ nullum iniri poſſe calculum: atque adeo ſe ſibi in hoc negotio loco haud male caviſſe. Interea, dicam aperte, diverſæ hujus, quam ſomniat, hæmiſphæriorum terreſtrium denſitatis cauſam nullam aſſignari poſſe, quæ non mechanicæ planetarum formationi, & phænomenis naturæ hodiernis ſimul adverſetur. Reſpondeo

(2.) Si alterum telluris hemiſphærium altero haud paulo altius aut denſius eſſet, non exinde tamen titubationem hanc quam commentus eſt Cl. Gregorius ſecuturam. Hoc enim in caſu oſcillaretur quidem Axis Globi; ſed ita, ut angulus inclinationis bis in anno ad maximam, & minimam quantitatem reverteretur; atque ita ut angulus iſte ejuſdem eſſet quantitatis in utroque ſolſtitio; quod ipſius hypotheſeως Gregorianæ fundamenta plane ſubvertit. Reſpondeo

(3.) Ex inæquali hac hemiſphæriorum terreſtrium altitudine, aut denſitate, ſi modo æquatoris altitudinem aut denſitatem vincat, ſequi æquinoctiorum *progreſſum*: cum palam ſit, & à Gregorio agnitum, ea omnino motu continuo *regredi*. Sin inæqualitatem hujuſmodi ſolummodo ſtatuat quæ majorem adhuc æquatoris altitudinem aut denſitatem ſartam tectam conſervari ponat, ita ut quantum ſuperent partes alteræ polares aut altitudine aut denſitate, tantum deficiant alteræ, dico quod neque ex hac hypotheſi cauſæ ſuæ adjumentum aliquod petere poſſit. Etenim propter virium in

al-

altero hemiſphærio defectum earum in altero hæmiſphærio exceſſum compenſantem, vires integræ axem moturæ etiamnum æquales manebunt, neque ullam ejuſdem titubationem efficient. Ita ut neque ex ſuppoſita inæquali iſta altitudine aut denſitate Titubatio axis Gregoriana ullo modo ſequatur. Reſpondeo

(4.) Si ipſam etiam axis terreſtris titubationem diſputandi gratia ſupponeremus, neque ſic ſcopum ſuum attingeret Gregorius. Talem enim iſte titubationem ſupponit qualis in ſolſtitiorum uno ad minimum inclinationis angulum axem reduceret, & ad maximum in altero. Ex principiis autem Newtoni prius poſitis, quæ & ipſius Gregorii ſunt pariter principia, ſequeretur maximum inclinationis axis angulum fore in octantibus poſt Nodorum ſyzygias, & minimum in octantibus poſt eorundem quadraturas; ita ut, quod prius diximus, in ipſis ſolſtitiis utriſque inter maximum & minimum angulum ubique intermediis nulla plane anguli inclinationis varietas ſit expectanda. Unde quoque, quod obiter eſt Notandum, & ipſe Flamſtedius, & eundem ſecutus Gregorius errant omnino, dum mutationem axis, cui æquinoctiorum præceſſio debetur, ullum hic locum habere ſupponant. Reſpondeo

(5.) Si denique ipſam axis nutationem, & tempore quo vult Gregorius, & in partes ab eo aſſignatas ſupponere placeret, Inclinationis quantitas longe minor foret, quam ut parallaxin Flamſtedianam potis eſſet efficere. Demus Gregorio Axem terræ quotannis oſcillari; demus quoque in æquinoctiorum altero oſcillationem fieri in hanc, in altero vero fieri in contrariam partem; itaut maxima quæ fieri poteſt differentia oriatur. Quantillula erit hæc differentiola? Nempe ex calculo olim adhibito conſtat oſcillationem illam grandiuſculam (comparative loquor) ex altitudine ſenſibili mille paſſuum quaſi 17, qua ſemidiameter æquatoris axem dimidium ſuperat orta, ad partem tantum unius minuti ſecundi aliquam aſſurgebat: cui

Prælect. Aſtronom. p. 40.

cui quantitati hæc oscillatio, mea quidem sententia, ne comparari quidem potest. Quid ergo hæ minutiarum minutiæ cum parallaxi ad integrum saltem unius minuti primi dodrantem assurgente? Eam nempe causa hæc ad effectum producendum habitura rationem quam puteus ad Oceanum. Sed me reprimo: & tandem concludo, effugium hoc Cl. Gregorii, quo fixarum parallaxin & annuum telluris motum ab Observatis Flamstedianis haud certo sequi contendit, haud exiguum esse ejusdem errorem, & labem non parvam operi alias pulcherrimo inurere.

Scholium. Notandum autem Cl. Flamstedium ratiocinia sua non recte in omnibus hoc loco instituisse, quod nuper annotarunt Galli: & Fixarum parallaxin nonnunquam ex phænomenis illam minime probantibus deduxisse; quod in tanto artifice mirandum. Veruntamen, cum rem penitius introspicerem, deprehendi ex Observationum solennium quindecim quas ipsi Galli veras esse, & suis consentaneas agnoscunt, Fixarum parallaxi etiamnum consentire undecim: & ex dissentientibus quatuor unam tantum ejus esse quantitatis ut negotium nobis facessere queat; quam proinde ab errore quodam, sive inter observandum, sive inter scribendum admisso derivatam fuisse æquum est ut existimemus. Præsertim cum similis fixarum parallaxis ex accuratis Hookii Observatis constare, nec aliunde solvi posse merito videatur. Sed hæc ulteriori Astronomorum industriæ sunt relinquenda.

Octob. 29°. 1705.

XXII.

XLIII SI singula Systematis Corpora ut *A* & *B* seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sint reciproce ut Quadrata distantiarum à trahente, erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem, ut sunt ipsa corpora.

Trahat corpus *A* vi acceleratrice per *a* exposita corpus *B*; & propter distantiam utrinque eandem trahat vicissim corpus *B* ipsum Corpus *A*, vi acceleratrice per *b* exposita. Quantitas motus est utrinque æqualis, propter reactionem utrinque actioni æqualem: Et ista motus quantitas ex velocitate in materiæ quantitatem ducta omnino oritur. Est itaque rectangulum $A \times b$ æquale rectangulo $B \times a$. Et proinde vis acceleratrix corporis *B*, erit ad vim acceleratricem corporis *A*, paribus distantiis, ut Corpus *B* ad corpus *A*. Atque adeo Corporum vires absolutæ erunt inter se ut ipsa Corpora. Nimirum summa virium æqualium in partes æquales paribus distantiis ubique tendentium. *Q.E.D.*

Scholium. Hujusmodi Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem autem *Attractionis* hic generaliter usurpamus pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem, sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aeris, mediive cujuscunque, seu corporei, seu incorporei oriatur, corpora innatantia utcunque in se invicem impellentis. Eodem sensu gene-

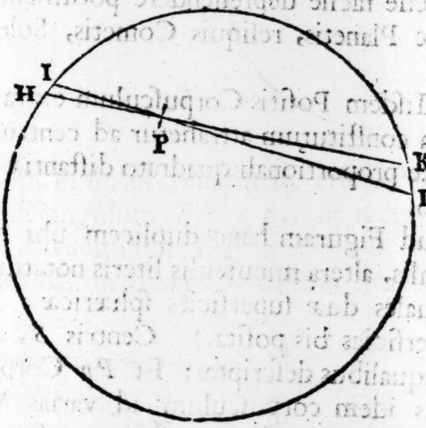
generali usurpamus vocem *Impulsus:* non species virium & qualitates physicas hic loci, sed quantitates & proportiones Mathematicas expendentes; ut in definitionibus prius explicuimus. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates, & rationes illæ quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequuntur. Deinde ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis, ut innotescat, quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant: Et tum demum de virium speciebus, causis, & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, qualia fere snnt majora omnia Systematis mundani Corpora, Sol, Fixæ, Planetæ, Cometæque, ex particulis, modo jam exposito, attractivis constantia debeant in se mutuo agere; & Quales motus inde consequantur.

XLIV. Si ad Sphæricæ superficiei Physicæ, sive crassitudinis ubique æqualis, sed contemnendæ, puncta singula æqualia tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum à punctis; Corpusculum intra superficiem ubilibet constitutum his viribus nullam in partem attrahetur: sed vel quiescet, vel motum quemvis inceptum sine perturbatione ulla continuabit, pariter ac si nullis omnino viribus à superficie ista urgeretur.

Sit *HIKL* Superficies illa Sphærica: & *P* corpusculum quodvis intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ rectæ quælibet, *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes. Et ob triangula similia *HPI*, *LPK*, [*HI* enim & *KL* arcus quam minimi pro rectis lineis sumi debent; & anguli ad *P* verticem oppositi æquantur; & * latera æqualem istum angulum continentia, sunt utrinque proportionalia:] arcus illi erunt distantiis *HP*, & *LP* proportionales: hoc est, erit *PH*, ad *PL*, sive *PI* ad *PK*, ut *IH*, ad *KL*. Et superficiei sphæricæ par-

* III, 35. *cum* VI, 14, & VI, 6. *Elem.*

particulæ quævis ad HI, & KL rectis innumeris per punctum P transeuntibus undique terminatæ, sive polygona sint, sive circuli, erunt figuræ inter se similes; & proinde in ratione arcuum istorum sive distantiarum à corpusculo duplicata. Et proinde, Vires integræ attractrices in contrarias partes æqualiter factæ, propter minoris superficiei situm propiorem, & majoris remotiorem, se mutuo destruent & tollent. Simili argumento attractiones omnes per totam sphæricam superficiem à contrariis attractionibus destruentur: Ac proinde Corpus P nullam in partem his attractionibus impelletur. *Q. E. D.*



Coroll. (1.) Cum itaque sphæra quævis, quæ spatium concavum concentricum sphæricum intus habet, in sphæricas hujusmodi superficies crassitiei contemnendæ innumeras recte dividi possit; & ex vi hujus demonstrationis superficierum quævis nullo modo corpusculum intus constitutum in ullam partem attrahere possit; Liquet Totam Sphæram nullam in corpusculum interius vim imprimere. Sed corpusculum illud, si prius quiesceret, etiamnum quieturum; si prius motu qualicunque ferretur; etiamnum motu eodem perreturum; non obstante sphæræ exterioris attractione.

Coroll.

Coroll. (2.) Et cum hoc de corpusculis quibuscunque corpus quodvis vel materiæ molem quamvis componentibus pari jure possit demonstrari; Liquet corpora quæcunque intra hujusmodi sphæram concavam posita, non obstante sphæræ attractione, aut quiescere, aut motu quovis pristino etiamnum ferri.

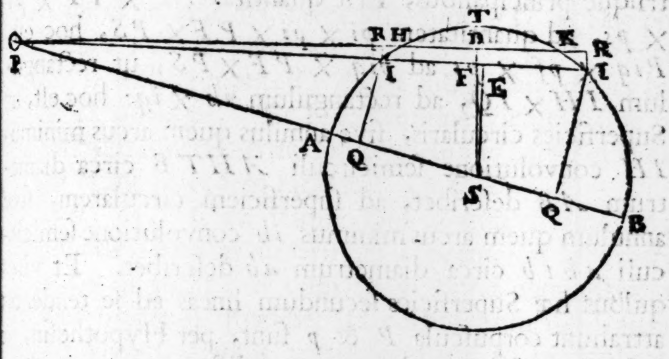
Coroll. (3.) Si itaque Tellus nostra, utpote Sphærica ex particulis attractivis composita, sphæricam cavitatem centralem habuisset, Animalia quælibet illic constituenda nulla gravitatis vi affecta motus omnes suos eadem libertate possent peragere, ac si nulla esset in rerum natura corporum gravitas. Neque sane ullam hujusmodi vim esse facile deprehendere potuissent. Et par est ratio de Planetis, reliquis Cometis, Sole, & stellis fixis.

XLV. Iisdem Positis Corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahetur ad centrum Sphæræ vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

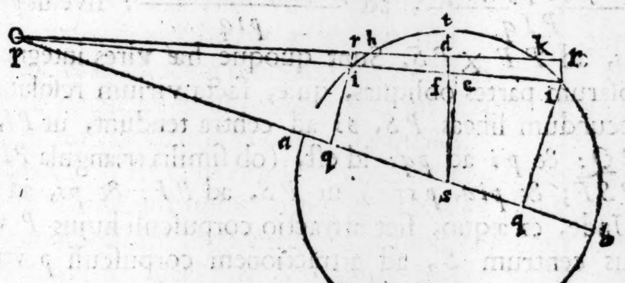
Sint apud Figuram hanc duplicem ubi earum altera majusculis, altera minusculis literis notatur, *AHKB* *abkb* æquales duæ superficies sphæricæ; (aut potius eadem superficies bis posita.) Centris *S*, *s* diametris *AB*, *ab* æqualibus descriptæ: Et *Pp* Corpuscula duo (aut potius idem corpusculum ad varias à superficie sphærica distantias positum,) sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à Corpusculis lineæ rectæ *PHK*, *PII*: *phk* *pii*: auferentes à circulis maximis *ATB*, *atb* æquales arcus, quam minime inter se differentes, *HK*, *hk*: & *ITI*, *iti*. Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; ipsis *PK*, *pk*; *SE*, *se* ipsis *PI*, *pi*; *IR*, *ir*; ipsis *PK*, *pk*. Quorum *SD*, *sd* secent *PI*, *pi* in punctis *F*, & *f*. Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. & ob æquales *DS*, & *ds*: *ES*, & *es*: & angulos minimos evanescentes *DPE*, *dpe*, lineæ *PE*, *PF*; & *pe*, *pf* evanescentibus nimirum differentiis *FE*, *fe*; & Lineolæ

D

DF, *df* pro æqualibus haberi possunt: quippe quarum ratio ultima angulis illis *DPE*, *dpe*; & *DSE*, *dse* simul evanescentibus est ratio æqualitatis. His itaque constitutis, erit in triangulis similibus *PRI*, *PDF*; & *pri*, *pdf*, *PI*, ad *PF*, ut *RI*, ad *DF*; & *pf*, ad *pi*, ut *DF*, vel *df*, ad *ri*. Et utrisque rationi-



bus æqualibus in unam compositis, erit rectangulum $PI \times pf$, ad rectangulum $PF \times pi$, ut rectangulum $RI \times DF$, ad rectangulum $DF \times ri$: hoc est, ut *RI*, ad *ri*: hoc est, in triangulis ultimo similibus *IRH*,



irh, (propter angulum rectum ad *R*, & *r*; & angulum *RHI* angulo *rhi*, si circuli æquales applicarentur sibi mutuo congruentem;) ut arcus evanescens *IH*, ad arcum evanescentem *ih*. Rursus, Est in triangulis simi-

ſimilibus PIQ, PSF: piq, psf, PI, ad PS, ut IQ, ad SE: & ps, ad pi, ut SE, vel se, ad iq. Et, utriſque rationibus æqualibus in unam compoſitis, erit rectangulum $PI \times ps$, ad rectangulum $PS \times pi$, ut rectangulum $IQ \times SE$, ad rectangulum $SE \times iq$: hoc eſt, ut IQ, ad iq. Et conjunctis rationibus utriſque principalibus, Erit quantitas $PI \times PI \times pf \times ps$, ad quantitatem $pi \times pi \times PF \times PS$, hoc eſt, $Piq \times pf \times ps$ ad $piq \times PF \times PS$, ut rectangulum $IH \times IQ$, ad rectangulum $ih \times iq$: hoc eſt, ut Superficies circularis, ſive annulus quem arcus minimus IH convolutione ſemicirculi $AHTB$ circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, ſive annulum quem arcus minimus ih convolutione ſemicirculi $ahtb$ circa diametrum ab deſcribet. Et vires quibus hæ Superficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p ſunt, per Hypotheſin, ut ipſæ Superficies, niſi quantum diſtantiarum quadrata eaſdem vires adaugeant vel diminuant: & proinde ſunt revera vires illæ ut ipſæ Superficies, applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum à corporibus, hoc eſt, ut $\frac{PIq \times pf \times ps}{PIq}$, ad $\frac{piq \times PF \times PS}{piq}$: ſive ut $pf \times ps$, ad $PF \times PS$. Sunt quoque hæ vires integræ ad ipſarum partes obliquas, quæ, facta virium reſolutione ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI, ad PQ: & pi ad pq: id eſt, (ob ſimilia triangula PIQ, PSF; & piq, psf:) ut PS, ad PF: & ps, ad pf. Unde, ex æquo, fiet attractio corpuſculi hujus P verſus centrum S, ad attractionem corpuſculi p verſus centrum s, ut $\frac{PF}{PS} pf \times ps$, ad $\frac{pf}{ps} PF \times PS$, ſive uu $PF \times pf \times ps \times ps$, ad $pf \times PF \times PS \times PS$, ſive etiam ut $ps \times ps$ vel psq, ad $PS \times PS$, vel PSq. Hoc eſt, ut diſtantiarum à centris ſuis quadrata reciproce. Et ſimili argumento, vires quibus Superficies

cies remotiores convolutione arcuum remotiorum *HL* *hl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut diſtantiarum à centris ſuis quadrata reciproce. Inque eâdem ratione erunt vires ſuperficierum omnium hujuſmodi circularium vel annularium, in quas utraque ſuperficies ſphærica, capiendo ſemper arcus æquales *HK*, *hk*: & *ITI*, *iti*: ſive, quod perinde eſt, perpendiculum *SD* æquale perpendiculo *sd*: & perpendiculum *SE* æquale perpendiculo *se* diſtingui poteſt: donec integra ſuperficies hoc modo exhauriatur. Et Inde, ſumma virium, ſive vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Cum itaque ſphæra quævis integra in hujuſmodi ſphæricas ſuperficies concentricas innumeras recte dividi poſſit; & cum ex vi hujus demonſtrationis ſuperficierum quælibet ita corpuſcuum illud attrahat, ut vis attractionis verſus centrum ſit in duplicata ratione diſtantiæ reciproce, Palam eſt, & ſphæram integram ita corpuſculum illud attrahere, ut vis centripeta verſus centrum ſit in duplicata ratione diſtantiæ ab illo centro reciproce.

Coroll. (2.) Et cum vires reliquæ obliquæ *IQ*, *iq* ex adverſis hemiſphæriis æſtimatæ ſibi mutuo opponantur, & ſe invicem omnino tollant, vires integræ centripetæ in corpuſculum exercitæ erunt viribus iſtis verſus centrum tendentibus omnino æquales.

Coroll. (3.) Et cum ſimiliter procederet demonſtratio, ſi vice corpuſculi unius corpus quodvis ex iſtis corpuſculis compoſitum ſupponeretur; (quod enim uni particulæ convenit, pari jure & ſingulis particulis, & proinde ipſarum ſummæ convenire eſt neceſſe;) liquet ſphæram quamvis ex particulis æqualiter attractivis conſtantem, corpus quodvis ita attrahere, ut attractionis quantitas ſit in ratione diſtantiæ à ſphæræ centro duplicata reciproce.

Coroll. (4.) Attractio itaque ſphæræ eodem modo ſe habet ac ſi vis integra verſus centrum tendens in ipſum

P cen-

centrum collecta uniretur, & ab isto solo puncto se undique per regiones in circuitu propagaret.

XLVI. Si ad sphærarum quarumvis homogenearum, sive ejusdem densitatis puncta singula tendant vires centripetæ æquales decrescentes in duplicata ratione distantiarum à punctis; ac detur ratio diametrorum sphærarum ad distantiam corporis ab earum centris; vires quibus corpora singula trahentur inter se collatæ erunt proportionales semidiametris sphærarum trahentium.

Nempe, vires sphærarum sunt ut ipsæ particulæ trahentes, sive ut ipsæ sphæræ; hoc est, in triplicata ratione semidiametrorum, paribus nimirum distantiis. Sed cum distantiæ inæquales ponantur, & in ipsa diametrorum vel semidiametrorum ratione inæquales, diminuentur vires in ratione distantiarum, hoc est, ex hypothesi semidiametrorum sphærarum duplicata. Vires itaque reliquæ, ab excessu rationis triplicatæ supra duplicatam æstimandæ, erunt in simplici semidiametrorum ratione directa. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Hinc si corpora quævis in circulis circa sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes revolvantur; sintque distantiæ à centris sphærarum proportionales earundem diametris, vel semidiametris, Tempora periodica erunt æqualia. Ex viribus enim in directa distantiarum ratione sequitur temporum periodicorum æqualitas; ut olim demonstravimus.

Coroll. (2.) Et vice versa; si tempora periodica sint æqualia, distantiæ corporum revolventium à sphæris homogeneis, sive ejusdem densitatis erunt diametris vel semidiametris sphærarum proportionales.

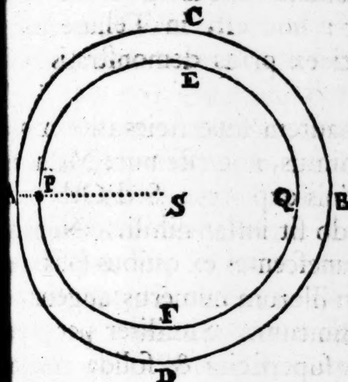
Coroll. (3.) Et ex datis temporibus periodicis circa sphæras quasvis peractis, & distantiis ab istis sphæris, dabuntur quoque sphærarum densitates. Nimirum calculum ineundo qualia exinde sequerentur tempora periodica ad distantias sphærarum semidiametris proportionales; & ab istorum temporum periodicorum excessu vel defectu mutuo densitatum defectum vel excessum e-

d-

dem reciproce proportionalem determinando. Exempla in Sole, Jove, Saturno, & Terra olim proferemus.

XLVII. Si ad Sphæræ alicujus datæ homogeneæ, sive æqualis ubique densitatis puncta singula tendant æquales vires centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum à punctis, Corpusculum intra sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.

In Sphæra *ACBD*, centro *S* descripta locetur corpusculum *P*: & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est per Propositionem 44. Quod sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus sphærarum differentia componitur, attractionibus ubique per attractiones contrarias destructis, nil agunt in Corpusculum *P*: Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. decrescit itaque vis centripeta propter sphæram minorem attrahentem in triplicata ratione distantiæ à centro diminutæ, crescit autem in duplicata ratione distantiæ inversa, propter accessum ad Centrum. Ergo vis reliqua ab excessu rationis triplicatæ supra duplicatam æstimanda, erit in ipsa distantiæ à centro ratione directa. *Q. E. D.*



Coroll. (1.) Si hujusmodi sphæra per centrum perforetur, Corpora omnia à distantiis omnibus sive magnis sive parvis dimissa æquali temporis spatio ad centrum descendent: spatio nempe 21′. 9″. in Tellure nostra, ut olim observavimus.

Coroll. (2.) Si autem nullum sit medium quod motui corporum descendentium vel ascendentium adversetur, Corpus quodvis demissum per æquale spatium ultra

tra centrum aſcendet quo ad centrum deſcenderat prius: atque ita perpetuo deſcenſu & aſcenſu oſcillantium per cycloidem pendulorum corporum motus æmulabitur. Et oſcillationes, ſi ita vocare liceat, in omnibus diſtantiis erunt pariter iſochronæ.

Coroll. (3.) Sin intervalla quotvis minima hujuſmodi ſphæræ concentrica inter ſuperficies quaſvis ſphæricas interpoſita ponantur, in quibus corpora quævis inſtar planetarum quorundam parvorum circa centrum in circulis revolvant, Erunt tempora periodica omnium hujuſmodi planetarum ubique æqualia. Eodem nempe temporis ſpatio periodum quamvis peragendo quo corpus quodvis demiſſum oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam obiret: hoc eſt, in Tellure noſtra ſpatio $1^h. 24'. 36''$. Uti ex prius demonſtratis facile conſtare poteſt.

Scholium. Notandum autem ſuperficies iſtas ex quibus ſolida componi ſupponimus, non eſſe pure Mathematicas, vel omnis craſſitudinis expertes: Sed Orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo ſit inſtar nihili. Nimirum in caſu præſenti Orbes evaneſcentes ex quibus ſphæra ultimo conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur, & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta ex quibus lineæ, & inde ſuperficies & ſolida componi nonnunquam dicimus, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ. Sed hæc impræſentiarum ſufficiant.

Novemb. 19°. 1705.

XXIII.

XLVIII. POSITIS iiſdem, Corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro. Nam diſtinguatur Sphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concentricas: & attractiones corpuſculi à ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi à centro, per Propoſitionem 45. Et componendo, Fiet ſumma attractionum, hoc eſt, attractio ſphæræ totius in eadem ratione. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Hinc in æqualibus diſtantiis à centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ipſæ ſphæræ; ſive ut diametrorum Cubi inter ſe. Nam per Propoſitionem 46. Si diſtantiæ ſint proportionales diametris, ſphærarum vires erunt ut diametri: Minuatur diſtantia major in illa ratione, & diſtantiis jam factis æqualibus augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa diametrorum ratione, hoc eſt, in ratione ipſarum ſphærarum.

Coroll. (2.) In diſtantiis quibuſvis Attractiones erunt ut ſphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Coroll. (3.) Si corpuſculum extra ſphæram homogeneam poſitum trahatur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis, decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ à particula.

Coroll. (4.) Cum itaque Planetæ primarii ſimul & ſecundarii omnes ad Solis centrum; Omnes Circumjoviales ad Jovis centrum; Omnes Circum-Saturnii ad Saturni centrum; & Luna ad Telluris centrum trahantur, ad ſua nempe quivis centra in diſtantiis variis, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiarum ab iſtis centris reſpective; Decreſcit vis particulæ cujuſque molis Solis, Jovis, Saturni, & Telluris componentis in duplicata ratione diſtantiæ à particula.

XLIX, Si ad ſphæræ homogeneæ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum à punctis, Sphæra quævis alia ſimilaris attrahetur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ejus à centro ſphæræ trahentis: per Propoſitionem 45. & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud à ſingulis ſphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio per Prop. poſtremam reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ejus à centro ſphæræ; adeoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eadem ratione. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Attractiones Sphærarum homogenearum verſus alias ſphæras homogeneas ſunt pariter ac eæ punctorum ſive corpuſculorum minimorum ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum à centris earum quas attrahunt.

Coroll. (2.) Idem valet ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eadem vi qua ab ipſis viciſſim trahuntur; adeoque cum in omni attractione urgeatur tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Coroll. (3.) Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa *Umbilicum* Conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi ſphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra ſphæram.

Coroll. (4.) Ea vero quæ de motu corporum circa *Centrum* Conicarum Sectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram: nimirum ubi ſphæra non concava, ſed aliquantulum concavis partibus interrupta ſupponitur, uti haud ita pridem obſervavimus.

L. Si Sphæræ in progressu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem, & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similares, & vis attractiva puncti cujusque decrescat in duplicata ratione distantiæ corporis attracti; vis tota qua hujusmodi sphæra una attrahit aliam, est reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Etenim hujusmodi sphæra in sphæricas superficies concentricas similares semper dividi potest. Et cum nuper demonstratum fuerit, quamvis superficiem seorsim spectatam alias omnes seorsim spectatas ita trahere, ut vis tota qua hujusmodi sphærica superficies alteram quamvis trahit, sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ à centro suo, constabit propositio de sphæris integris ex hujusmodi superficiebus conflatis. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc si ejusmodi sphæræ complures sibi invicem per omnia similes se mutuo trahant, attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt in æqualibus centrorum distantiis ut sphæræ ipsæ attrahentes; sive ut materiæ quantitates in iisdem contentæ.

Coroll. (2.) Inque distantiis quibusvis inæqualibus ut sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter sphærarum centra.

Coroll. (3.) Attractiones vero motrices, seu pondera sphærarum in sphæras in æqualibus centrorum distantiis ut sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim: id est, ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta. Nam cum corpus attrahens propter reactionem actioni ubique æqualem & in partes contrarias tendentem versus corpus attractum pari motus quantitate, hoc est, celeritate corporibus reciproca, moveatur; idque si nulla esset corporis attracti vis proprie attractiva: Et cum iis qui sphæram aliquam incolunt tota approximantium sphærarum velocitas sphæræ alteri necessario referatur; eo nimirum quod motum proprium dignoscere nequeant; hinc evenit ut vis alterius sphæræ centripeta universa,

versa, qua nimirum ad suam appropinquat, aut potius qua utraque conatu mutuo ad amplexus mutuos fertur, quæque *Pondus* alterius dicitur, proportionalis sit non sphæræ attrahenti solummodo, sed sphæris utrisque simul sumptis. Sic sane pondus corporis cujusvis in terram illud omnino dicitur quo corpus illud & terra velocitate accedendi relativa ad se mutuo feruntur. Sic sane Olim ostendimus gravitatem Lunæ in terram esse ejus quidem quantitatis ut spatio horarum 4. & minutorum primorum 20. fere ad ejus centrum caderet. Non quod omnis ista velocitas ad Lunam revera sit referenda; sed quod si omnis accedendi velocitas respectiva ex motu utriusque syderis oriunda ad Lunam solam referretur, prout incolis Terræ usu venire debet, efficeret illa ut isto temporis spatio Luna ad Telluris centrum caderet.

Prop. 23. prius.

Coroll. (4.) In distantiis inæqualibus attractiones motrices sive pondera sphærarum in sphæras erunt ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Coroll. (5.) Eadem valent etiam à fortiori ubi attractio integra oritur à sphæræ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminabitur attractio, Proportione servata.

Coroll. (6.) Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium atque quiescentium proportionales quiescentium diametris; Tempora periodica erunt æqualia.

Coroll. (7.) Et vicissim si tempora periodica sint æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris.

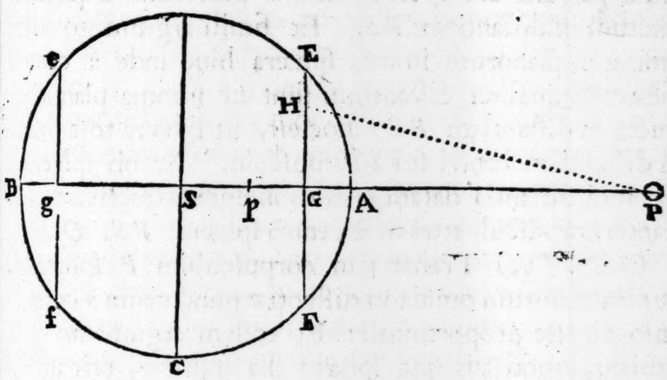
Coroll. (8.) Eadem omnia quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi sphæra attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

Coroll. (9.) Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes conditionis cujusvis jam descriptæ: hoc est, aut in universum homogeneæ; aut saltem in iisdem à centro distantiis homogeneæ.

LI. Si

LI. Si ad ſingula ſphærarum homogenearum puncta æqualia tendant vires centripetæ æquales, nimirum paribus diſtantiis, diverſis autem diſtantiis iſtis punctorum à corporibus attractis directe proportionales; vis ex omnium partium viribus compoſita, qua ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, erit ut diſtantia inter centra ſphærarum.

Casus *(1.)* Sit *ACBD* ſphæra ex hujuſmodi punctis attractivis conflata: *S* centrum ejus: *P* corpuſculum attractum: *PASB* axis ſphæræ, per corpuſculi centrum tranſiens: *EF*, & *ef* plana duo phyſica craſſitudinis contemnendæ, quibus ſphæra ſecetur, huic axi



perpendicularia, & hinc inde à centro ſphæræ æqualiter diſtantia. Puncta *G*, & *g* interſectiones planorum & axis: & *H* punctum quodvis phyſicum in plano *EF*. Vis centripeta puncti *H* in corpuſculum *P* ſecundum lineam *PH* exercita eſt, ex Hypotheſi, ut ipſa diſtantia *PH*: quæ per virium reſolutionem in vires *GH*, *GP* erit diſpeſcenda. Unde vis ſecundum lineam *PS*: hoc eſt, verſus centrum *S*: ut ipſa longitudo *PG*. [nimirum virium parte altera *HG*, à vi puncti ad alteras axis partes in eodem plano directe oppoſitas æqualiter ab axe diſtantis deſtructa.] Vis igitur punctorum omnium in plano *EF*; hoc eſt, vis plani totius

totius qua corpusculum P trahitur versus centrum S simili modo erit ut numerus vel summa punctorum ducta in distantiam PG: hoc est, ut contentum sub plano ipso EF, & distantia illa PG. Et consimiliter vis plani ef qua corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut æquale illud planum ductum in distantiam illam Pg. Et summa virium plani utriusque ut planum EF, ductum in summam distantiarum $PG + Pg$; id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS: [propter lineas PG, PS, Pg Arithmetice proportionales; & exinde summam extremarum æqualem mediæ duplæ.] Hoc est, ut duplum planum EF; sive summa planorum æqualium ductum in distantiam PS. Et simili argumento vires omnium planorum in tota sphæra hinc inde à centro sphæræ æqualiter distantium sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS: hoc est, ut sphæra tota ducta in distantiam centri sui à corpusculo. Et ob sphæram in omni distantia datam erit vis integra attractiva ut distantia corpusculi attracti à centro sphæræ PS. Q.E.D.

Cas. (2.) Trahat jam corpusculum P sphæram, puncta nimirum omnia vi distantiæ punctorum à corpusculo directe proportionali: Et eodem argumento probabitur, quod vis qua sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS. Q.E.D.

Cas. (3.) Componatur jam sphæra altera homogenea ex particulis pariter pro directa distantiæ ratione attractivis innumeris P: Et quoniam vis qua corpusculum unumquodque trahitur est ut distantia corpusculi à centro sphæræ primæ ducta in sphæram eandem; atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in sphæra secunda trahentur, hoc est, qua sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si sphæra illa traheretur à vi prodeunte de corpusculo unico, in centro sphæræ primæ posito. Et propterea proportionalis erit distantiis inter centra sphærarum. Q.E.D.

Cas. (4.)

CAS. (4.) Trahant jam ſphæræ ſe mutuo: & vis duplex ſive geminata proportionem priorem etiamnum ſervabit. Q. E. D.

CAS. (5.) Locetur jam corpuſculum p intra ſphæram $ACBD$. & quoniam vis plani ef in corpuſculum erit ut contentum ſub plano illo, & diſtantia pg: ſeu ut $ef \times pg$. & vis contraria plani EF ut contentum ſub plano illo, & diſtantia PG, ſeu ut $EF \times PG$: ſive $ef \times PG$. Erit itaque vis attrahens ut differentia contentorum, hoc eſt, ut $ef \times pg - PG$: vel ut duplum ef in differentiam $pg - PG$ dimidiam $= 2 ef \times \frac{1}{2} pg - PG$. Hoc eſt, ob æquales SG, Sg, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, ſeu in pS diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento Attractio planorum omnium ut EF, ef, in ſphæra tota à centro hinc inde æqualiter diſtantium; hoc eſt, attractio ſphæræ totius erit ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, ducta in pS, diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Q. E. D.

CAS. (6.) Et ſi ex corpuſculis innumeris p componatur ſphæra nova homogenea intra ſphæram priorem ſita, probabitur, ut prius, quod attractio ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem erit ut diſtantia centrorum pS. Q. E. D.

LII. Si Sphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam, (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares; in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſque ſit directe ut diſtantia corporis attracti, vis tota, qua hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, erit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Etenim hujuſmodi ſphæra in circulos æquales EF, ef, & in iiſdem à centris G, g diſtantiis homogeneos ſemper dividi poteſt: & cum ex vi jam demonſtratorum quælibet perimeter circularis, ex quibus quivis integer circulus componitur, vim exhibeat pro-

por-

portionalem distantiæ à sphæræ centro, vis integra erit etiam in ipsa distantiæ à centro ratione directa.

Corollarium. Quæ superius in Propositionis 50. Corollariis de sphærarum attractionibus, ubi lex attractionis erat in ratione distantiæ duplicata inverse sunt demonstrata, ad hunc casum applicata ubique valent, mutatis rite mutandis. Speciatim vero, Quæ olim de motu corporum circa *centra* Conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphæricorum conditionis jam descriptæ, suntque corpora attracta sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium. Attractionum casus duos insigniores jam dedimus expositos; nimirum ubi vires centripetæ vel decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici: Efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in Sectionibus Conicis, ex lege nimirum priori circa *focum*, posteriori circa *centrum* (& casu priori corporibus *extra* sphæras positis, posteriori corporibus *intra* easdem positis congruente.) Et componentes corporum sphæricorum vires centripetas eadem lege in recessu à centro decrescentes vel crescentes cum seipsis. Quod est notatu dignum & ad phænomena systematis Solaris solvenda maxime accommodatum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhiberent, & à constitutione mundi magis alienas, hic loci sigillatim percurrere longum esset, & pene inutile. Præterea; post explicatas in prioribus corporum sphæricorum attractiones, Pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium. Sed ista particulatim tractare minus ad nostrum institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis ob eorum in rebus Philosophicis aliqualem usum subjungere. Sed ista in Prælectionem proximam differemus.

Decemb. 3. 1705.

XXIV.

XXIV.

LIII. Si media duo ſimilaria ſpatio planis parallelis utrinque terminato diſtinguantur ab invicem; & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum; neque ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem Attractio in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis ubique eadem; Sinus incidentiæ in planum alterutrum, erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data; hoc eſt, qualiſcunque ſit angulus inclinationis ratio iſtorum ſinuum, ſemper eadem reperietur.

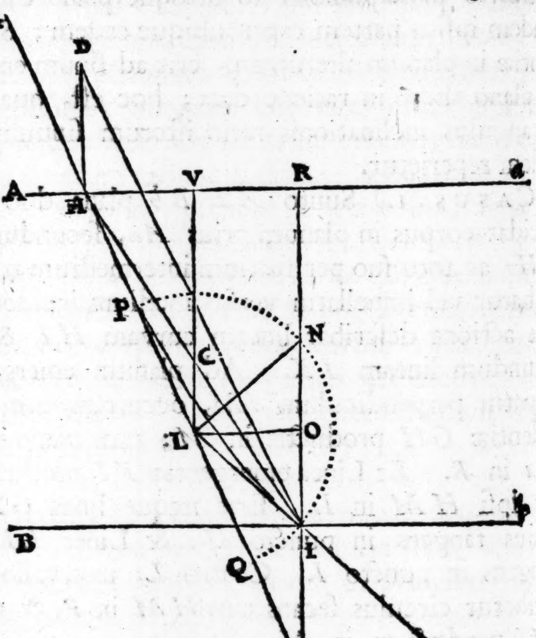
Casus (1.) Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa*, ſecundum lineam *GH*: ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ: eaque actione deſcribat lineam curvam *HI*. & emergat ſecundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*; tum plano incidentiæ *Aa* in *R*. Et Linea emergentiæ *KI* producta occurrat ipſi *HM* in *L*. Erit itaque linea *GM* curvæ hujus tangens in puncto *H*: & Linea *LK* ejuſdem tangens in puncto *I*. Centro *L*, intervallo *LI*, deſcribatur circulus ſecans tam *HM* in *P*, & *Q*; quam *MI* productam in *N*. Et primo ſi attractio vel impulſus ponatur, uniformis erit, juxta olim demonſtrata, curva illa linea *HI* Portio Parabolæ. Cujus è diametris una erit linea *LV* planis utriſque perpendicularis; & linea recta *HI* erit ejuſdem diametri Ordinata, ab eadem in puncto *C* bifariam diviſa. Hujuſce autem Parabolæ proprietas hæc eſt; ut rectangulum ſub latere recto ad verticem *H* pertinente; in hoc caſu, propter corporum velocitatem da-

Prop. 8. prius.

tam

† Coroll. 2. Prop. 8. prius.

tam hic suppositam, ubique † dato: & abscissa *HD*, vel eidem æquali *IM*, æquale sit ipsius semiordinatæ *DI*, vel eidem æqualis *HM* quadrato. Hujusce etiam Parabolæ tangens *HM* bisecabitur in puncto *L*: (ut enim in triangulis similibus *HCL*, *HIM*, est *HC*, ad *HI*, ita erit *HL*, ad *HM*. Sed *HC* est semissis *HI*: ergo erit & *HL* semissis *HM*.) Unde si ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales semper erunt



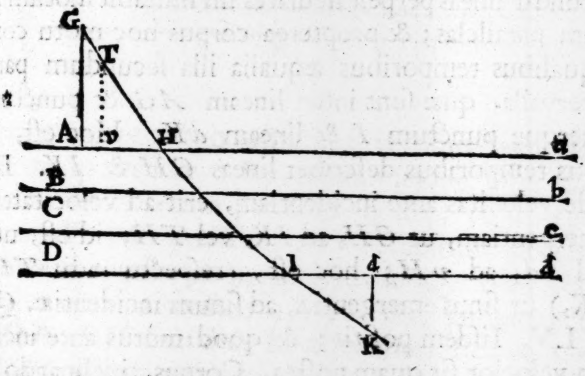
MO & *OR*: & additis æqualibus *IO*, *ON*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Cum itaque distantia planorum in omnibus inclinationibus *IR* detur, dabitur & in omnibus inclinationibus eidem æqualis *MN*. Estque proinde Rectangulum $NM \times MI$, ad rectangulum sub latere recto ad verticem *H* pertinente & *MI*, ut data *NM*, ad latus rectum datum; sive in data ratione.

one. Est autem rectangulum sub *HD* vel *MI*, & latus rectum, æquale quadrato *DI* vel *HM*. Atque adeo rectangulum *NM*×*MI*, est ad quadratum *HM*, in ratione data. Sed rectangulum *NM*×*MI* æquale est rectangulo *PM*×*MQ*: id est, differentiæ quadratorum *ML* & *PL*, seu quadratorum *ML* & *LI*. Et *HM* quadratum datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem *LM* quadratum. Ergo datur ratio *MLq* — *LIq*, ad *LMq*: & divisim ratio *LIq*, ad *LMq*: & ratio ejusdem subduplicata lineæ *LI*, ad lineam *LM*. Sed in omni triangulo *LMI* sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ *LMR*, vel *AHG* ad sinum anguli emergentiæ *MIK*, vel *LIR*; vel ejusdem ad duos rectos complementi *LIM*. [Idem enim est sinus anguli *LIR*, & ejusdem ad duos rectos complementi *LIM*.] *Q. E. D.*

Corollarium 1. *Prop.* 36. *Lib.* 3. *Elem.*

Corollarium 1. *Prop.* 20. *Lib.* 3. *Elem.*

CAS. (2.) Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC*, *CcdD*, &c. & agitetur vi quæ sit in singulis separatim



uniformis, at in diversis diversa: & per jam demonstrata sinus incidentiæ in planum primum *Aa*, erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo *Bb*, in data ratione:

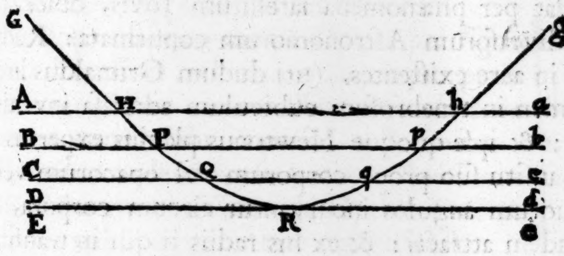
one : Et hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum Bb, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio Cc, in data ratione : & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto Dd in data ratione : & ſic in infinitum. Et ex æquo, Sinus incidentiæ in planum primum, erit ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum; eo ut attractionis vel impulſus actio ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & Ratio ſinus incidentiæ in planum primum, ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

LIV. Iiſdem poſitis, Velocitas corporis ante incidentiam, erit ad ejuſdem velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ, ad ſinum incidentiæ.

Capiantur AH Id æquales, & Erigantur perpendicula AG, dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G, & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum Aa demittatur normaliter Tv. Et diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa, Bb, Cc, Dd, perpendicularem; alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus agendo ſecundū lineas perpendiculares nil mutabit motum ſecundum parallelas; & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam dK. Hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH & IK. Et proinde velocitas ante incidentiam, erit ad velocitatem poſt emergentiam, ut GH, ad IK, vel TH; id eſt, ut AH vel Id, ad vH; hoc eſt, (reſpectu radii TH, vel IK,) ut ſinus emergentiæ, ad ſinum incidentiæ. *Q.E.D.*

LV. Iiſdem poſitis; & quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea, Corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem; & angulus reflectionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et ſit ea lineæ incidentis *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut ſinus incidentiæ, ſit ad ſinum anguli recti, hoc eſt, ad radium circuli cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ primæ ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo *Dd*, in ſpatium per *DdeE* exprimendum. Et ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, ſive ſinui anguli recti, Angulus ille emergentiæ erit rectus; adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*. Et quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum remotius per *Ee* exprimendum. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*,



opterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur verſ medium incidentiæ. Revertetur itaque inter *Cc*, *d*, deſcribendo arcum parabolæ *QRq*; cujus Verprincipalis erit punctum *R*. Secabitque planum in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*. dein perdo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus pribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliplana in iiſdem angulis in *p*, & *h*, ac prius in *P*, *H*; emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua dit in *H*, Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, intervalla in infinitum minui, & numerum augeri;

eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & Angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

Scholium. Harum attractionum haudquaquam dissimiles videntur Lucis refractiones & reflexiones factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit Snellius; & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit Cartesius: [cum enim sinus quilibet sit ad radium, ut radius ad secantem complementi; & Angulus incidentiæ inter radium & planum refringens Snellio dictus, sit Anguli incidentiæ inter radium & perpendicularem Cartesio dicti complementum; Ratio secantium à Snellio usurpata, cum ratione sinuum à Cartesio usurpata omnino congruet & coincidet.] Namque Lucem successive propagari, & spatio quasi septem aut oct minutorum primorum à Sole ad Terram venire jam constat per phænomena satellitum Jovis, observationi bus diversorum Astronomorum confirmata: Radii au tem in aere existentes, (uti dudum Grimaldus luce p foramen in tenebrosum cubiculum admissa invenit pr mus; & ipse quoque Newtonus plenius expertus est: in transitu suo prope corporum vel opacorum vel pe spicuorum angulos incurvantur circum corpora, qua in eadem attracti: & ex his radiis ii qui in transitu il propius accedunt ad corpora incurvantur magis, qu magis attracti, uti ipse quoque Newtonus diligent observavit, & fusius alibi nuperri exposuit. Cum autem talis incurva radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam dii qui incidunt in cultrum prius incurvari in aere qu cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in trum. Fit igitur refractio radiorum lucis non in pun incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvation radiorum, factam nempe partim in aere antequam tingunt vitrum, partim etiam, ut videtur, in vitro p quam illud ingressi sunt. Nec aliter se res habere

Optica L. III.

d

detur in reflexionibus, uti accurate ostendit Newtonus in libro jam citato. Quo Lector harum rerum cupidus est omnino remittendus. Ob analogiam autem quæ est inter propagationem radiorum lucis, & progressum corporum, visum fuit Propositiones tres priores veræ opticæ præparatorias demonstrare. Notandum autem obiter cum Newtono, ad usus opticos præ figuris conicis sphæricas esse maxime accommodatas. Et ex ejusdem sententia, si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphærice figuratis, & aquam inter se claudentibus conflentur, fieri potest ut errores refractionum quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis ab aquæ refractionibus satis accurate corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda esse statuit, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est quo minus Optica per figuras vitrorum vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi Labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur. Sed de hisce omnibus videndus est Author Clarissimus in egregio illo & longe nobilissimo de Optice Tractatu, quem tandem in publicum emittere dignatus est.

Scholium (2.) Cum autem visum fuerit viro summo Propositiones nonnullas sine demonstratione in isto libro proponere, quæ moram legentibus injiciunt, Operæ pretium erit earum demonstrationes, aut nuper adinventas, aut ab eodem viro alibi traditas hic loci apponere: Ut Tyronibus Opus istud Opticum, auro contra non carum, inoffenso pede deinceps pertransire liceat. Sed cum horulæ hujusce spatio minime concludendæ sint, eas termino post Natalitia proximo Renovabimus.

Decemb. 10. 1705.

XXV.

PROP. (1.) SIT ACB superficies sphærica reflectens, cujus centrum est E. Bisecetur radius EC in puncto T. Et si in linea EC ad eandem puncti T partem signentur puncta Q, & q; ita ut TQ, TE, & Tq sint lineæ continue proportionales Geometrice; & punctum Q sit radiorum incidentium Focus, erit punctum q radiorum reflexorum Focus. Est enim ex hypothesi $QT : TC :: TC : Tq$. Et Componendo $QT + TC = QC : QT :: CT + Tq = Cq : CT = ET$. Hoc est, $QC : QT :: Cq : ET$. Et alternando $QC : Cq :: QT : ET$. Sed per V. 19. Elem. $QT : ET :: QE : Eq$. Ergo ex æquo $QC : Cq :: QE : Eq$. Unde in triangulo cujus basis est Qq, & vertex in superficie sphærica ACB, puncto C satis propinqua, ita ut laterum majus sit ipsi QC, & minus ipsi qC quam proxime æquale, dividetur basis Qq à puncto E sphæræ centro, ita ut partes QE & Eq sint inter se in ratione laterum QC & qC. Et * proinde linea à Trianguli vertice per centrum E ducta verticalem trianguli angulum bisecabit; & æquales angulos utrinque præstabit. Unde radii per Q transeuntes, eo quod anguli incidentiæ & reflectionis æquantur, reflectentur ad punctum q. & vice versa. $Q.E.D.$

Pag. 7. Cas. 2. Lib. 1.

* VI, 3. Elem.

PROP. (2.) Sit ACB superficies refringens sphæ[rica] cujus centrum est E. In EC ra[dio] utrinque producto signentur puncta [T] & t; ita ut tam ET, quam Ct, (inter se nempe [æ]quales,) sit ad radium EC, ut sinuum angulorum in[ci]dentiæ & refractionis minor, est ad istorum sinuum [dif]ferentiam. Dein signentur in eadem linea puncta [Q] & q, ita ut TQ, sit ad ET, vel Ct, ut est Et, [ad] tq. Sint autem ea punctorum loca ut linea tq sit[...] plagam à pnncto t ei contrariam quam habet linea [...]

Pag. 8. Cas. 3.

quoad punctum T. Si autem focus radiorum Incidentium sit in puncto Q, Refractorum focus erit in q. Est enim ex hypothesi, ut TQ, ad TC, ita ET, ad tq. Et componendo, TQ, est ad $TQ + TC, = QC$, ut est $ET, = Ct$, ad $Ct + tq, = Cq$. Et alternando, est TQ, ad Ct, ut QC, ad Cq. Et componendo & invertendo ut $TQ + Ct, = QE$, ad TQ, ita $QC + Cq, = Qq$ ad QC. Sive Qq, ad QC, ut QE, ad QT. Unde per Cl. Hugenii demonstrata Dioptricæ suæ, *pag.* 26, *&c.* constat propositum. $Q.E.D.$

Prop. (3.) Sit $ACBD$ Lens refringens sphærica utrinque convexa, aut concava, aut saltem plano-convexa, vel plano-concava, Cujus Axis (sive linea utrasque superficies normaliter secans, & per sphæræ centrum transiens,) sit CD. In axe sint puncta F & f radiorum refractorum Foci, ut supra, inventi; ii nimirum qui radiis utrinque axi parallelis, si unica esset superficies refringens, congruerent. Bisecetur linea Ff in puncto E. & centro E, radio EF, vel Ef describatur circulus. Esto jam punctum quodvis Q, radiorum incidentium focus. Ducatur QE circulum priorem intersecans in punctis T & t, & in eadem linea signetur punctum q; illud nimirum ut linea tq, sit ad lineam tE, ut eadem tE vel ipsi æqualis TE, est ad TQ. Jaceat autem linea tq in plagam quoad punctum t ei contrariam quam habet TQ quoad punctum T. Erit tum punctum q radiorum refractorum focus; eorum nempe qui axi satis sunt propinqui, quorum tantum in hisce casibus ratio haberi debet

Pag. 8. *Cas.* 4.

Est enim ex hypothesi TQ, ad TE, ut tE, ad tq. Ergo componendo est TQ, ad $TE + TQ, = QE$, ut est tE, ad $tE + tq, = Eq$. Unde †TQ, est ad QE, ut est $TQ + TE, = QE$, ad $QE + Eq = Qq$. Unde liquet propositum. per demonstrata Hugenii Dioptricæ suæ *p.* 67, *&c.*

V, 12. *Elem.*

Prop. (4.) Mistura radiorum Solis in Spectro pt refracto, est ad misturam

Lib. 1. *pag.* 46.

ſturam Radiorum Solis per foramen vacuum tranſeuntium, ut iſtius ſpectri Latitudo, eſt ad latitudinis ejuſdem & longitudinis differentiam, ſive ut *ag* ad *gm*. Eſto enim *ah*, ad *am*, ut *ag*, ad *AG*. Erit ergo ſpatium *ah* æquale omnibus minorum circulorum areis, in duplicata nimirum radiorum ratione utrinque. Et miſtura radiorum eſſet æqualis, ſi modo omnes minores circuli in eo ſpatio coaleſcerent. Sed cum per ſpatium *pt* diſpergantur, erit miſtura ut *gh* ad *gm*. Unde cum miſtura radiorum in ſpectro *PT*, ſit ad miſturam radiorum Solis foramen vacuum tranſeuntium, ut *AG*, ad *GM*, ſive ut *ag*, ad *gh*: & miſtura ſpectri *pt*, ſit ad miſturam ſpectri *PT*, ut *gh*, ad *gm*; erit ex æquo perturbate, miſtura ſpectri *pt*, ad miſturam radiis Solis ſine refractione traſeuntibus congruam, ut *ag*, ad *gm*. Q.E.D.

PROP. (5.) Si quod corpus data quacunque velocitate in ſpatium latitudinis contemnendæ, & parallelis planis utrinque terminatum, incidat, & inter tranſeundum verſus planum remotius perpendiculariter attrahatur vel impellatur; ita ut vis attrahens vel impellens ſit aut ubique eadem, aut ſaltem ad datas ab illo plano diſtantias eadem, velocitas perpendicularis corporis ſpatium illud prætergreſſi æquabitur ſummæ quadratorum velocitatis prioris, & velocitatis inter tranſeundum acquiſitæ radici quadraticæ. Sin retardetur corpus inter tranſeundum, vice ſummæ quadratorum accipienda eſt eorundem differentia, & valebit propoſitio. Sequitur ex *Newt. Princip. Mathemat. Prop.* 39. *Probl.* 27. *Coroll.* 2.

Lib. 1. *pag.* 57.

PROP. (6.) Si quæ corpora vel Lucis Radii ſpatium hujuſmodi parallelis planis terminatum pertranſeuntia, & vi ſimili ſed nunc majori nunc minori inter tranſeundum afficiantur; motus de novo acquiſitus erit ſemper in ſubduplicata virium generantium ratione: ita ut motuum quadrata virium rationes veras determinent. Eſto *AB* ſuperficies refringens, ſive exponat *AB* ſpatium contemnendæ

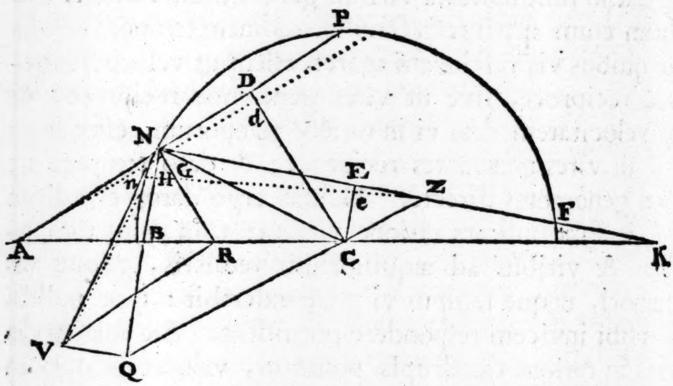
Lib. 2. *p.* 71, 72.

craſſi-

craſſitudinis parallelis planis terminatum, cujus vi oritur radiorum refractio. Eſto etiam IC lucis radius obliquiſſime in planum refractivum incidens ad punctum C, ita ut anguli incidentiæ complementum ACI ſit indefinite parvum. Et eſt CR radius refractus. A puncto quovis dato B erigatur perpendicularis BR, radium refractum ſecans in puncto R. Et ſi CR radii refracti motum exponat, qui in duos motus CB, & BR reſolvatur, erit motus pars CB plano refringenti parallela, & BR eidem perpendicularis: & cum motus ſecundum planum AB à vi eidem perpendiculari nullatenus mutetur, dabitur CB; ob datam nempe radiorum velocitatem hic loci ſuppoſitam. Linea BR erit motus per refractionem dato tempore genitus. Et erit in ſubduplicata virium generantium ratione. Ob datam enim ſpatii refractivi latitudinem tempora tranſitus quibus vis refringens ageret, eſſent ut velocitates genitæ reciproce, ſive ut vires generantes reciproce; & ob velocitatem data vi in ratione temporum, eſſet linea BR ut vires generantes reciproce; & dato tempore ut vires generantes directe. Neutro ergo dato, erit linea BR in ſubduplicata ratione virium: tum enim temporibus & viribus ad æquilibrium reductis, neque vis tempori, neque tempus vi præponderabit: quæ nullibi alias ſibi invicem reſpondere potuiſſent. Sic ſane modo vires in ratione quadrupla ponantur, velocitas dupla in tempore dimidio generabitur: ſive linea BR erit ejuſdem lineæ dupla, & ita ubique. Q.E.D.

Prop. (7.) In Iridis ſolutione Arcus QF. & angulus AXR erunt maximi ubi ND, eſt ad CN, ut $\sqrt{II-RR}$ ad $\sqrt{3RR}$. Quo etiam in Caſu NE, erit ad ND, ut $2R$, ad I. Et Angulus ATS quem radii AN & HS conſtituunt erit minimus ubi ND, eſt ad CN, ut $\sqrt{II-RR}$, ad $\sqrt{8RR}$. Quo etiam in caſu NE, erit ad ND, ut $3R$, ad I. Quam Propoſitionem duplicem ſequenti rationum ſerie cum Cl. Newtono in Lectionibus ſuis Opticis MSS. demonſtrabimus,

Problema. Si Radii ſive paralleli, ſive verſus commune aliquod punctum inclinati ſe ſphæræ objiciant refringendos, refractorum extra axem ſibi quam proximorum & in eodem plano cum incidentibus jacentium concurſum deſignare. Sit AN incidens radius, NK refractus ejus; & NV in plano trianguli ANK recta linea tangens ſphæram ad N. Ad AN duc NR perpendicularem, & occurrentem Axi AC, in R: nec non RV parallelam, & occurrentem tangenti NV, in V. Item ad NK duc NQ perpendicularem, & VQ parallelam, convenientes in Q. Et age QC occurrentem NK in Z. erit Z concurſus radiorum ipſi AN viciniſſimorum. Sit enim An alius ex incidentibus priori AN infinite vicinus, & occurreus NR



in G. Age nZ, occurrentem NQ in H: & ad AN, & NK e C centro ſphæræ demitte normales CD, & CE, occurrentes An, & nZ in d, & e. Jam cum AN ſupponatur infinite vicinus An, arcus infinite parvus Nn pro recta coincidente cum tangente NV haberi poteſt; ac triangula NGn, NRV; ut & NHn, NQV pro ſimilibus. Quare eſt $DC : Dd :: (NR : NG :: NV : Nn :: NQ : NH) : EC : Ee$. Et converſe $DC : (DC - Dd)\, dC :: EC : (EC - Ee)\, eC$; & viciſſim $DC : EC :: dC : eC$. Eſt autem

DC

DC ad EC ut ſinus incidentiæ, ad ſinum refractionis, propterea quod NK ſit refractus ipſius AN: adeoque etiam dC ad eC eſt ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis; & proinde cum anguli DAd, & EZe ſint infinite parvi, atque adeo Cd, ad An; & Ce, ad nZ perpendiculares, vel ſaltem perpendiculis æquipollentes, erit nZ refractus ipſius An. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Eſt $ND : NE$ (ſive $NP : NF$) :: $NR : NQ$. Nam acta NC. propter triangulum NDC ſimile triangulo NRV; & triangulum NEC ſimile triangulo NQV; eſt $ND : NR$ (:: $NC : NV$) :: $NE : NQ$. & alterne, $ND : NE :: NR : NQ$.

Hinc promptior emergit Problematis reſolutio. Nempe d Radios AN. NK erige normales NR. NQ. quorum NR axi AC occurrat; & NQ. ſit ad NR, t NF, ad NP. Dein age QC quæ cum NK in uæſito Z conveniet.

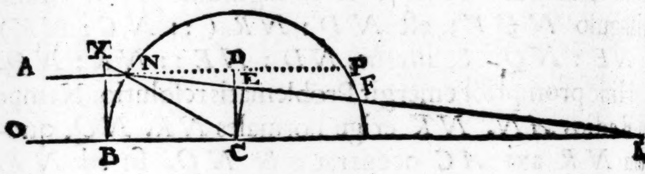
Coroll. (2.) Eſt etiam $AN \times DC \times NE : AD \times$ $C \times ND :: NZ : EZ$. Nam eſt $AD : AN :: DC :$ R. & inde $NR = \frac{AN \times DC}{AD}$. Item $ND : NE$ $: NR : NQ$. & inde $NQ = \frac{AN \times DC \times NE}{AD \times ND}$. deoque $AN \times DC \times NE : AD \times ND \times$ C (:: $NQ : EC$) :: $NZ : EZ$.

Coroll. (3.) Si punctum radians A infinite diſtet, ve parallelos radios ejaculetur, poſito $I : R$ :: ſinus cidentiæ: ſinum refractionis: Erit $I \times NF : R \times$ $P :: NZ : EZ$. In hoc enim caſu AN, & AD, m ſint infinite longæ, pro æqualibus haberi debent: ue adeo per Corollarium 2. hujus erit $DC \times NE$ $EC \times ND :: NZ : EZ$. Sed, ex hypotheſi, $DC : EC :: I : R$. & proinde $I \times NE : R$ ND (:: $NZ : EZ$) :: $NP : NF$.

Notetur autem, Quod mutatis mutandis reſolutio Promatis cuicunque caſui facile accommodatur; ſive radii

radii incidentes divergant à puncto aliquo, vel ad idem convergant, vel incidant paralleli.

Problema alterum. E Parallelis radiis ad circulum refractis radium illum determinare, cujus pars circulo inclusa datam habeat rationem ad partem refracti ejus eidem circulo inclusam. Sit AN radius incidens: NK refractus: NP, & NF partes eorum circulo inclusæ: CD, & CE perpendicula ad istas partes è centro circuli demissa: & BC semidiameter acta parallela AN. Sitque



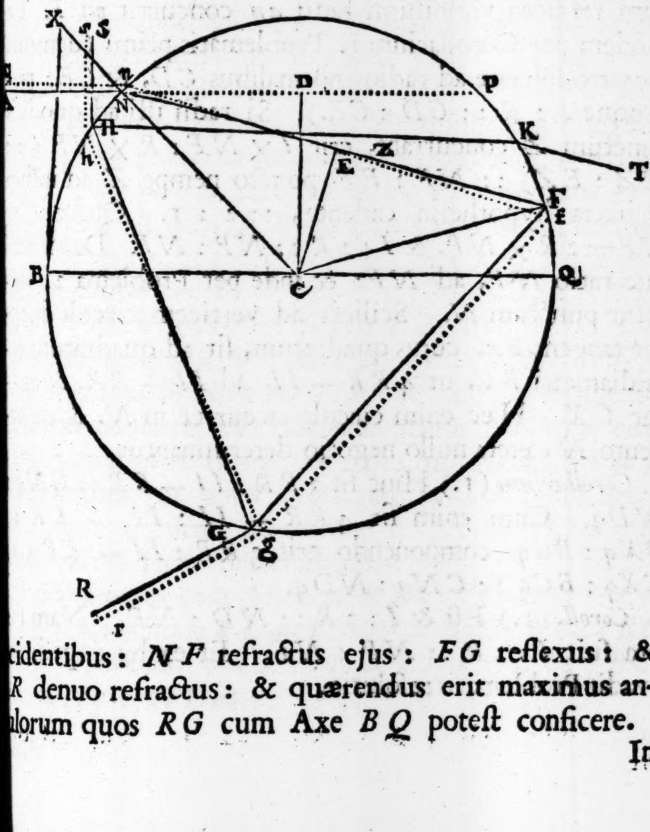
$CD : CE :: I : R$. & $NP : NF :: p : q$. His positis, ut innotescat punctum N, quod radios AN, & NK determinat, erige ad BC, normalem BX, cujus quadratum, sit ad BC quadratum, ut $\frac{qq - pp}{pp}$, ad $\frac{II - RR}{II}$. & acta Cx secabit circulum in desiderato N. Est enim ex hypothesi, $p : q$ (:: NP : NF ::) $ND : NE$. Et $I : R :: CD : CE$ quare $\frac{q}{p} ND = NE$. & $\frac{R}{I} CD = CE$. Porro cum sit $NDq + CDq \; (= NCq) = NEq + CEq$ aufer hinc inde $NDq + CEq$, & restabit $CDq - CEq = NEq - NDq$: Hoc est, substituendo valores CE & NE modo inventos, $CDq - \frac{RR}{II} CDq := \frac{qq}{pp} NDq - NDq$: & facta reductione $\frac{II - RR}{II} CDq = \frac{qq - pp}{pp} NDq$. Quo in proportionalitatem resolut

fiet $\frac{qq-pp}{pp}$: $\frac{II-RR}{II}$ (:: $CDq : NDq$) :: $BXq : BCq$. *Q.E.D.*

April 8. 1706.

XXVI.

Prob. (3.) SOLE sphæram pellucidam illustrante radiorum ejus post unam reflexionem emergentium maximam ad axem inclinationem determinare. Sit *BNK* sphæra proposita: *BQ* diameter, sive axis incidentibus radiis parallelus: *AN* aliquis ex



incidentibus: *NF* refractus ejus: *FG* reflexus: & *GR* denuo refractus: & quærendus erit maximus angulorum quos *RG* cum Axe *BQ* potest conficere.

In

In quem finem advertendum est quod eo solo in casu ubi RG maxime inclinatur ad BQ, radii ipsi AN vicinissimi possunt emergere paralleli ad RG. Nam in aliis casibus ex emergentibus radiis sibi vicinissimis alii magis, alii minus continuo inclinantur ad BQ; adeoque aliquantulum inclinantur ad se invicem.

Advertendum est præterea quod radii emergent paralleli qui conveniunt ad punctum reflexionis. Duc enim radium an, ipsi AN parallelum, & quam proximum. sitque ejus refractus nf: reflexus fg: ac iterum refractus gr. Et punctis F & f coincidentibus, cum Anguli NFn, & GFg sint æquales; & refractiones ad Nn, & Gg similes, emergentes Radii GR, & gr æque paralleli erunt ac incidentes NN, & an.

Quærendus est itaque radius AN, cujus refractus cum refracto vicinissimi radii an concurrit ad F. Et quidem per Corollarium 3. Problematis primi (demissis à centro sphæræ ad radios normalibus CD, & CE: positoque $I : R :: CD : CE$.) Si radii isti ad quodvis punctum Z concurrant, erit $I \times NF : R \times NP$ (:: $NZ : EZ$) :: $NF : EF$· puncto nempe Z ad ipsum F juxta hypothesin cadente, :: 2 : 1. Quare $I \times NF = 2R \times NP$. & $I : 2R :: NP : NF$. Datur itaque ratio NP, ad NF: & inde per Problema 2. dabitur punctum N. Scilicet ad verticem circuli ducatur tangens Bx, cujus quadratum, sit ad quadratum semidiametri BC, ut $4RR - II$, ad $II - RR$. & agatur CX. Hæc enim circulo occurret in N. & ex invento N cætera nullo negotio determinantur.

Corollarium (1.) Hinc fit $3RR : II - RR :: CNq$: NDq. Cum enim sit $4RR - II : II - RR$: $BXq : BCq$. componendo erit $3RR : II - RR$ (: $CXq : BCq$) : $CNq : NDq$.

Coroll. (2.) Est & $I : 2R :: ND : NE$. Nam supra fuit $I : 2R :: NP : NF$. Et ex his expeditio evadit Problematis resolutio.

Sch

Scholium. Una cum maxima inclinatione radii RG, datur maximus arcuum FQ ad refractos NF terminatorum. Nam angulus FCQ, quem FQ subtendit, est æqualis angulo quem CF & AN comprehendunt: hoc est, æqualis dimidio anguli quem RG, & AN, vel BQ comprehendunt: & proinde arcuum FQ æque ac angulorum ab RG & BQ comprehensorum maximus est, qui radio AN in punctum jam inventum incidente definitur.

Prob. (4.) Sole sphæram pellucidam illustrante radiorum ejus post duas reflexiones emergentium minimam ad axem inclinationem determinare.

Sint AN & an Radii duo incidentes sibi quam proximi, qui post duas reflexiones in Ff, & Gg emergant secundum HS & hs. Et manifestum est quod in eo solo casu ubi acutus angulus, quem BQ & SH comprehendunt, minimus est, radii illi HS & hs possunt esse paralleli; uti supra de radiis GR & gr dictum fuit. Et ubi hoc accidit, radius etiam FG ad fg parallelus erit. Unde arcus Ff duplicatus ($=$ arcui $Ff + Gg =$ arcui $FG - fg =$ arcui $NF - nf.$) $=$ arcui $Nn - Ff$, adeoque arcus Ff triplicatus $=$ arcui Nn. Et cum NF dividatur in Z in ratione istorum arcuum, ut patet, erit $NZ = 3\,ZF$, seu $3\,EZ$. Cum itaque per Corollarium 3. Problematis primi sit $I \times NF : R \times NP :: NZ : EZ$. sive $:: 3 : 1$. erit $I \times NF = 3\,R \times NP$. sive $I : 3\,R :: NP : NF$. datur itaque ratio NP, ad NF: & inde per Problema 2. dabitur punctum N, ducendo nempe BX quæ circulum tangat in vertice B; & cujus quadratum, sit ad BC quadratum, ut $9\,RR - II$, ad $II - RR$: & agendo CX quæ occurret peripheriæ in N. Invento autem N, cætera facile determinantur.

Corollarium (1.) Hinc est $8\,RR : II - RR :: CNq : NDq$. Nam $9\,RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. & componendo $8\,RR : II - RR$ ($:: CXq : BCq$) $:: CNq : NDq$.

Coroll.

Coroll. (2.) Est etiam $I : 3R :: ND : NE$. utpote cum supra fuerit $I : 3R :: NP : NF$.

Scholium. Ad eundem modum maxima radii KT post tres reflexiones emergentis inclinatio ad axem, juxta ac maximus arcuum QG investigabitur. Scilicet in in eo casu FG, & fg convenient ad G. eritque arcus Ff ($=$ arcui $Fg - fg$. $=$ arcui $NF - nf$.) $= Nn - Ff$. & inde arcus Ff duplicatus $=$ arcui Nn. & $NZ = 2ZF$. adeoque $4 : 1 :: NZ : EZ ::$ (per Corollarium 3. Problematis primi) $I \times NF : R \times NP ::$ sive $I : 4R :: NP : NF$. Et proinde per Problema secundum $16RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. Unde consectatur esse $15RR : II - RR :: CNq : NDq$. Et $I : 4R :: ND : NE$.

Atque ita si radii post quatuor reflexiones emergentis inclinatio minima desideretur, determinabis faciendo ut sit $25RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. Vel $24RR : II - RR :: CNq : NDq$. Et $I : 5R :: ND : NE$. Et sic præterea in infinitum.

Scholium. Ex hac Cl. Newtoni limitum in Iride determinatione liceat mihi phænomenon quoddam, sive potius phænomeni absentiam, mihimet quondam satis difficilem & pene insolubilem visum, hic loci solvere. Quare nempe non appareat Iris circa solem ad distantiam graduum quasi 26; ubi nempe radii per refractionem duplicem sine ulla reflexione ad oculos pertingunt? Est enim ex calculo eo loci radiorum constipatio visui afficiendo necessaria & sufficiens. Quin & dubium adauget, quod videtur vero simile prima fronte Iridem hanc omnium maxime insignem, & coloribus maxime intensis ornatam, utpote duplici refractione, sine ulla reflexorum radiorum jactura & imminutione oriundam, visum iri. Sicut enim Iris primaria secundariâ est longe insignior, eo quod ex duplici refractione & unica reflexione oriatur; dum secundaria ex duplici refractione & duplici etiam reflexione pendeat; Sic sane erat expectandum, ut Iris alia, hisce duabus prior & præstan-

tior,

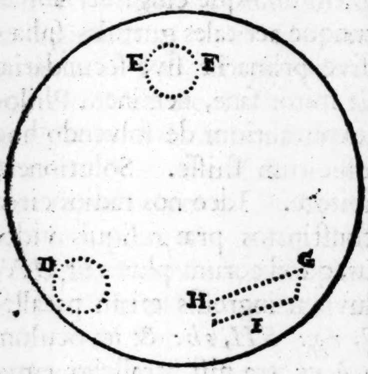
tior, colorum ſplendore tantum primariam noſtram exuperans quantum primaria illa ſecundariam excedere deprehendatur, expectandum erat, inquam, ut hujuſmodi Iris ad gradus quaſi 26. Solem undique cingeret, inſtar coronæ nobiliſſimæ, ubicunque aer tales guttulas ſphæricas haberet, quæ Iridi ſive primariæ ſive ſecundariæ generandæ ſatis eſſent. Et miror ſane, neminem Philoſophorum Iridis naturam explicantium de ſolvendo hoc Phænomeno ſatis obvio ſollicitum fuiſſe. Solutionem itaque hanc Noſtram accipitote. Ideo nos radios circa limites *F* & *G* affatim conſtipatos præ reliquis videmus & colores dignoſcimus, quod eorum plures ut *AN*, *an* parallelos ſphæram pluviam ingreſſis etiam parallelos regrediuntur; ut *RG*, *rg*: *SH*, *sh*: & ita oculum ſimul ingrediuntur: cum è contra niſi parallelos egrederentur, angulum aliqualem conſtituerent, & oculum ſimul ingredi non poſſent, utcunque ad punctum *F* vel *G* ſatis eſſent conferti & conſtipati. Unde cum radii circa punctum *F* egredientes non parallelos egrediantur, ſed angulum aliquem conſtituant, liquet eos oculum ſimul ingredi non poſſe, atque proinde Iridem exhibere non poſſe. *Q. E. S.*

LVI. Fluidi Mathematici homogenii, [hoc eſt, corporis cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe,] quod in vaſe quocunque immoto clauditur, & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione;) æqualiter premuntur undique; & abſque omni motu à preſſione illa orto permanent in locis ſuis.

Cas. (1.) In vaſe ſphærico claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique. Ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur, vel è loco ſuo deturbabitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes ejuſmodi partes ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes ſimili motu ſimul moveantur: atque hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio,

&

& motus omnis excluſus ſupponitur niſi qui à preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur, contra hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur, etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua à centro diſtantia moveri in plagam contrariam. In plagas autem contrarias non poteſt pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla hoc in caſu de loco ſuo movebitur. *Q.E.D.*



CAS. *(2.)* Fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *EF* pars ſphærica fluidi: & ſi hæc undique non prematur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus per caſum primum [ad hujuſmodi ſphæram, æquali undique preſſione affectam, æque ac in vaſe rigido contentam pertinentem,] permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebant in locis ſuis per caſum eundem primum. [de fluido iſto enim hic agitur, cujus partes abſque omni motu permanere in locis ſuis ibi demonſtravimus.] & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod ſphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q.E.D.*

CAS. *(3.)* Præterea, Diverſarum partium ſphæricarum preſſio erit æqualis. Nam partes ſphæricæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, propter motus reactionem actioni ſemper æqualem & contrariam. Sed & per caſum ſecundum partes ſphæricæ

quæ

quæcunque eadem vi undique premuntur. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ eadem vi premuntur, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque. *Q. E. D.*

CAS. (4.) Omnes fluidi hujusce partes undique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt partibus sphæricis in punctis quibuscunque: & ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per casum tertium: & propter reactionem actioni ubique æqualem vicissim ab illis æqualiter premuntur. *Q. E. D.*

CAS. (5.) Cum igitur fluidi hujusce pars qualibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter; partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se manifestum est quod fluidi cujuscunque *GHI* quod undique premitur æqualiter partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

CAS. (6.) Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem pressioni fortiori; per definitionem fluiditatis.

CAS. (7.) Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quam ex alio: sed eidem cedet: idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum; & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum quam primum à parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum, reducetur pressio undique ad æqualitatem in momento temporis, absque motu locali; & subinde partes fluidi per casum quintum se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corollarium. Hinc motus partium fluidi hujusmodi inter se per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam mutari non possunt, nisi quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

Coroll. (2.) Cum autem fluidi hujusmodi Mathematici definitio & affectiones cum natura & phænomenis fluidorum naturalium maxime congruere videantur, æquum est ut casuum horum demonstrationes fluidis nostris naturalibus, aquæ præsertim, & consimilibus applicentur. Unde liquebit partium fluidi internarum quietem inter se, fluiditatis naturæ nullo modo repugnare: & motum omnem partium fluidorum inter se calori, fermentationi, vel causis aliis extrinsecis acceptum potius esse referendum, quam ipsi fluiditatis naturæ. Si enim partes fluidi sint vel sphæricæ, vel sphæroides, & perfecte politæ; ita ut nunquam inter se connecti possint, sed potius se invicem in punctis physicis solummodo tangant, congeries hujusmodi particularum corpora component qualia nos *Fluida* dicimus; & qualium nos genera plura in rerum natura observamus; etiamsi particulæ ipsæ quiescant. Fluidum ergo ex partibus admodum *mobilibus*, non autem revera necessario *motis* constare videtur.

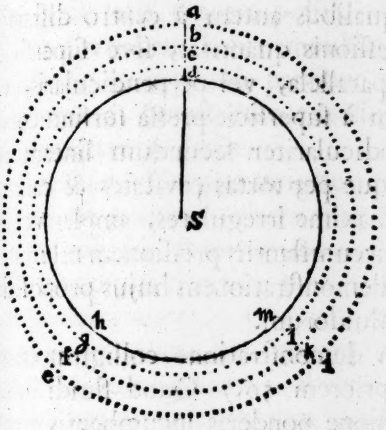
Junii 2°. 1706.

XXVII.

LVII. SI fluidi sphærici, & æqualibus à centro di- stantiis homogenei, fundo sphærico concen- trico incumbentis partes singulæ versus centrum totiu gravitent, sustinet fundum pondus Cylindri cujus basi æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem qu fluidi incumbentis.

Sit *dhm* superficies fundi, & *aei* superficies sup rior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *bf* *cgl* distinguantur fluidum in Orbes concentricos, a qualiter crassos, & concipe vim gravitatis agere solum modo in superficiem superiorem Orbis cujusque, *æquales* esse actiones in *æquales partes* superficierum om nium. Premitur ergo superficies suprema *aei* vi si pl

plici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes, & superficies secunda bfk, (per Prop. 56.) premuntur. Premitur præterea superficies secunda bfk vi propriæ gravitatis, quæ vi priori addita facit pressionem duplam. Hac pressione & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione tripla urgetur superficies tertia, cgl Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta; quintupla quinta; & sic deinceps.



ressio igitur qua superficies unaquæque urgetur non est t quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus rbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur graitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium, oc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylinrum præfinitum, (si modo Orbium augeatur numes, & minuatur crassitudo in infinitum; sic ut actio avitatis à superficie infima ad supremam continua redtur,;) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superfis infima pondus Cylindri cujus basis æqualis est surficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumben. *Q. E. D.*

Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravis decrescit in ratione quavis assignata distantiæ à cen; ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum denis. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Fundum igitur non urgetur à toto fluidi umbentis pondere; sed eam solummodo ponderis tem sustinet quæ in hac Propositione describitur: ndere reliquo à fluidi figura fornicata sustentato.

Coroll. (2.) Si ſphæra integra ad centrum uſque ex hujuſmodi fluido conſtet, centrum nullum pondus ſu-ſtinebit; pondere univerſo à fluidi figura fornicata, vel potius in hoc caſu figura ſphærica, ſuſtentato.

Coroll. (3.) In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit horizonti parallela, vel perpendicularis, vel obliqua: ſive fluidum à ſuperficie preſſa ſurſum conti-nuatum ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam re-ctam, vel ſerpat oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel an-guſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur applicando demonſtrationem hujus propoſitio-nis ad caſus ſingulos fluidorum.

Coroll. (4.) Eadem demonſtratione colligitur etiam, (per Propoſitionem priorem 56,) Quod fluidi gravis partes nullum ex preſſione ponderis incumbentis acqui-runt motum inter ſe; ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Coroll. (5.) Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod nequit condenſari, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum; non deſcendet, non aſcendet, non co-getur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt, manebit ſphæricum, non obſtante preſſione. Si quadratum eſt manebit quadratum; idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſi-mum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem cor-poris ſubmerſi: & par eſt ratio omnium ejuſdem ma-nitudinis, figuræ, & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum, ſervato pondere liqueſceret, & indueret formam fluidi, hoc, ſi prius a-cenderet, vel deſcenderet, vel ex preſſione figuram n-vam induceret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo q-gravitas ejus, cæteræque motuum cauſæ permanent. A qui per caſum 5. Prop. prioris, jam quieſceret, & fig-ram retineret: Ergo & prius.

Cor

Coroll. (6.) Proinde Corpus quod ſpecifice gravius eſt quam fluidum ſibi contiguum ſubſidebit; & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumqne & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Nam exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Coroll. (7.) Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas: altera vera & *abſoluta*; altera apparens, vulgaris, & *comparativa*. Gravitas *abſoluta* eſt vis tota qua corpus deorſum tendit, ſive qua corpus in loco vacuo deſcenderet. Gravitas relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis qua corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis, ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet: & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur; aliunde enim derivari non poteſt. Alterius generis gravitate, quæ nempe apparens, vulgaris & *comparativa* appellari poteſt, corpora non gravitant in propriis locis, ſeu in fluidis ſuis reſpective immerſa; id eſt, inter ſe collata non *prægravant*, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent: uti corpora quævis gravia intra ſphæram concavam poſita ex æqualitate gravitationis undique verſum nullo modo gravitare videntur, uti olim obſervatum. Sic ſane quæ in aere ſunt, & non prægravant, ſive non omnino in aere deſcendunt, uti nubes & vapores, vulgus ſubinde gravia non judicat. Quæ prægravant, ſive in aere deſcendunt, uti grando, & guttæ pluviæ, ea vulgus gravia judicat; quatenus ab aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſu-

pra pondus aeris. Unde & vulgo dicuntur levia quæ sunt minus gravia, aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt, non absolute & vere; quia descendunt in vacuo. Sic & in aqua corpora quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt sunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ, vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt; etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius; comparative tamen & in sensu vulgi, [imo & in sensu Philosophorum plerorumque ante seculum hodiernum] non gravitant in aqua. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Coroll. (8.) Quæ de gravitate, sive vi illa centripeta qua gravia terrestria centrum terræ petunt, in ratione aut absoluta, aut distantiarum reciproca duplicata; obtinere debent in aliis quibusunque viribus centripetis, & absolutis, & secundum legem quamcunque distantiæ auctæ aut diminutæ auctis aut diminutis; si modo hujusmodi leges alicubi reperiantur.

Coroll. (9.) Proinde, si medium in quo corpus aliquod movetur urgeatur vel à gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius, differentia virium est vis illa motrix quam in præcedentibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus à vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Coroll. (10.) Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper per Propositionis prioris Corollaria quod non mutabunt situm partium internarum inter se. Proindeque si animalia immergantur, & sensatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora à compressione omnifariam undique condensari possunt. Et p[...]

est ratio cujuscunque corporum systematis, fluido comprimente circumdati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur; & solam retinerent gravitatem suam comparativam: nisi quatenus fluidum vel motibus earum resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

LVIII. Fluida non descendentia se invicem, & tam immersa corpora, quam continentia, data basi pro ratione altitudinis perpendicularis, non autem pro ratione quantitatis materiæ premunt. Hoc est, pressio cylindri aquæ v. g. altitudinis quadrupedalis, ubi circuli cylindricæ columnæ area est unius tantum pollicis quadrati, æqualis est pressioni cylindri cujusvis aquæ altitudinis quadrupedalis ubi circuli cylindricæ columnæ area est centum vel mille pollicum quadratorum, & sic ubique: nimirum si basis aquea cum aqua in tubo contenta communicans, sit utroque in casu æqualis.

Hæc est notissima hydrostaticæ scientiæ regula, per experimenta sæpius reperta; vixdum autem, uti opinor, physice aut mathematice demonstrata; quam hoc modo demonstrare conabor. Notum est ex primis motuum physicorum elementis quantitatem virium motricium, sive effectuum iisdem respondentium ex materiæ motæ quantitate in velocitatem ducta prorsus oriri: & proinde eandem fore pressionem ex qualibet materiæ prementis quantitate modo ejusdem velocitas sit semper & ubique materiæ quantitati reciproce proportionalis. Notum est etiam stateræ, vectis, libræ, & hujusmodi instrumentorum mechanicorum vires ex hujusmodi materiæ & velocitatis combinatione reciproca derivari; & datum pondus à vi seu pressione data quantulacunque moveri posse, si modo machina eo modo ponderi simul & pressioni admoveatur, ut distantiæ ab hypomochlio, & proinde velocitates ponderis & pressionis sint ex necessitate motuum sibi invicem reciproce proportionales. Sic sane unicum pondo ad distantiam quatuor pedum ab hypomochlio tantundem valet ac quatuor pondo ad di-

ſtantiam unius pedis; eo quod ex neceſſitate motuum per vectem vel ſtateram conjunctorum fieri non poteſt quin pondus unicum cum velocitate, velocitatis alterius ponderis quadrupla moveatur: atque adeo æqualem vim & pares effectus ut *inter movendum* habeat eſt neceſſum. *Inter movendum*, inquam, minus æquiponderat ſive æquivalet majori: nec ſane aliter: uti perperam plerique exiſtimare videntur. *Si quando* enim quieſcit machina, palam eſt gravitatem, ſive preſſionem, ſive vim majoris eſſe revera gravitatis, preſſionis, & vis minoris omnino quadruplam; nec ullum in eo caſu æquipondium expectandum. [*Si quando* inquam quieſcat machina. Nam ſi phyſice, aut ſaltem mathematice loquamur, nullum corpus omnino quieſcit, ſed ubi motuum celeritas tantilla eſt, ut à ſenſibus noſtris percipi nequeat, corpora quieſcere dicimus.] Itaque ubi area ſectionis cylindricæ aquæ eſt unius tantum pedis quadrati, deſcendit illa centuplo vel millecuplo velocius, quam ubi area iſta centuplo vel millecuplo major ſupponitur: atque id adeo quod aqua in vaſe contenta & ipſum quoque vas continens in aliquali motu ſemper ſunt poſita, neque unquam abſque omni motu quieſcere queunt. Alias, ut omnino exiſtimo, quieſcens aquæ columna centuplo vel millecuplo major, abſoluta ſua gravitate centuplo vel millecuplo majore prædita, aquam & vas quieſcentia pondere centuplo vel millecuplo premerent. Caſus enim hicce eſt ejuſdem penitus naturæ cum eo ſyphonis inverſi crurum admodum inæqualium; ubi ideo tantum fit æquilibrium, quod velocitates aſcenſus & deſcenſus aquæ in utroque canali ex natura ſyphonis ſint neceſſario quantitati aquæ reciproce proportionales.

Coroll. (1.) Premunt ergo fluida non pro quantitatis materiæ prementis, ſed altitudinum perpendicularium ratione.

Coroll. (2.) Proinde Orbis Ligneus ad fundum ſe- ſitulæ aqua plenæ demerſus ad ſummum emerget, no-

ob

obſtante quod multo plus aquæ ſupra eundem quam infra reperiatur. Concavus enim ille aquæ cylindrulus cum aqua inferiore ad margines undique communicans eandem æque premit, & lignum æque ſuſtollit, ac ſi omnis ſitulæ aqua eundem premere & ſuſtollere potuiſſet.

Coroll. (3.) Nulla itaque modo opus eſt Principio Cl. Mori Hylarchico ad hoc effectum ſolvendum. Ex Mechanica enim motus lege jamjam demonſtrata aſcenſus orbis lignei neceſſario ſequitur.

Coroll. (4.) Sic ſe habent Fluida *non deſcendentia*; uti in Propoſitione aſſerui. Sin vas, cum fluido, & tubo, ex vi gravitatis omnium communi deſcendat, perit, opinor, preſſionis communicatio, & ceſſat effectus: ita tamen ut etiamnum ſecundum altitudinem æque ac in priori caſu preſſio effectum ſuum ſortiatur: ſive eodem modo premit, ubi maxima eſt aquæ columna, ac ubi minima; ejuſdem nimirum altitudinis; ita ut jam tandem in univerſum aſſerere liceat, Fluida ſecundum altitudines perpendiculares non ſecundum materiæ quantitatem omnino premere.

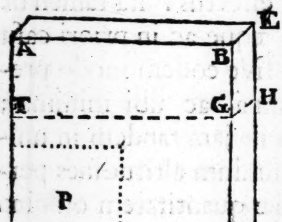
Novemb. 11°. 1706.

XXVIII.

LIX. SI fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, ita ut ubi vires comprimentes duplæ, quadruplæ, vel octuplæ ſunt, denſitates inde oriundæ ſint etiam duplæ, quadruplæ vel octuplæ, & ita in univerſum, Vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum. Et vice verſa, Particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas ſit compreſſioni proportionalis.

In-

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico *ACE*. dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*. Et particularum ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio ob naturam fluiditatis obtinentium, diſtantiæ erunt ut Cuborum Latera *AB*, *ab*: & Medii denſitates reciproce ut ſpatia cubica continentia *AB* cub. & *ab* cub. In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP*, æquale quadrato cubi minoris *db*. Et ex hypotheſi preſſio qua quadratum *DP* urget fluidum incluſum, (ſive qua fluidum incluſum urget quadratum) erit ad preſſionem qua quadratum illud *db* urget fluidum incluſum, ut Medii denſitates ad invicem; hoc eſt, ut *ab* cub. ad *AB* cub.



Sed preſſio qua quadratum *BD* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem qua quadratum *DP* urget idem fluidum, ut quadratum *DB*, ad quadratum *DP*. hoc eſt, ut *ABq*, ad *abq*. Ergo ex æquo preſſio qua quadratum *DB* urget fluidum, eſt ad preſſionem qua quadratum *db* urget fluidum, ut *ab*, ad *AB*. ſive reciproce ut diſtantia particularum. Subtracta enim de ratione triplicata laterum *ab* & *AB*, ratione eorundem duplicata; reſtat ratio ſimplex laterum; ſive diſtantiæ particularum, preſſioni earundem in vas continens (ſive vaſis continentis in particulas) reciproce proportionalis. Exempli gratia: Eſto

cubus major cubi minoris octuplus: ſive latus cubi majoris lateris cubi minoris duplum. Tum ſane denſitas fluidi in vaſe minore erit quoque denſitatis in majore octupla, ob eandem materiæ quantitatem in ſpatio

octuplo minore contentam. Et ex hypothesi quod compressio in datum spatium exercita sit in universum densitati ad amussim proportionalis, erit integra compressio particularum sive vires comprimentes eidem proportionales in cubo minore in ratione octupla compressionis sive virium comprimentium in majore. Sed superficies integra, qua fit compressio, vel superficies quadrati cujusvis in cubo minore, est ad superficiem integram, vel superficiem quadrati cujusvis homologi in cubo majore, in ratione subquadrupla. Est ergo pressio octupla cum pressione altera earundem particularum in spatium quadruplo majus dispersarum comparanda. In spatio itaque quadruplo minore eadem materiæ quantitas, sive eædem fluidi particulæ pressionem octuplam sustinent, necesse itaque est ut quævis particula pressionem duplo quam prius majorem sustineat; sive ut vires centrifugæ particularum sint reciproce proportionales distantiis earundem. *Q.E.D.*

Sic sane, si planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis distinguatur fluidum in duas partes: Hæ se mutuo prement iisdem viribus quibus premuntur à planis *AC*, *ac*: hoc est, in proportione *ab*, ad *AB*. adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum *FGH* in cubo majore, sunt ad vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab*, ad *AB*: hoc est, uti jam demonstravimus, reciproce ut distantiæ particularum ab invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa; si vires particularum singularum sint reciproce ut distantiæ particularum, id est, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones quadratorum *DB*, *db* ut summæ

summæ virium; & pressio quadrati DP, ad pressionem quadrati DB, ut abq, ad ABq: Et ex æquo, pressio quadrati DP, ad pressionem quadrati db, ut ab cub. ad AB cub. Ratione enim simplici, cum ratione duplicata composita emergit ratio triplicata. ita ut vis compressionis in uno, sit ad vim compressionis in altero, ut densitas fluidi ad densitatem, directe. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Cum itaque per experimenta constet aeris nostri per vices compressi & rarefacti densitatem esse viribus comprimentibus, sive compressioni ubique proportionalem; admodum vero simile videtur aerem ex particulis se mutuo in inversa distantiarum ratione fugientibus vel fugantibus constare. Etsi enim hæc vis quasi centrifuga vi universali centripetæ, sive gravitati, è diametro adversa cum eadem consistere non posse videatur; attamen fieri potest ut præter generalem illam gravitatis legem materiam omnem qua materiam attinentem, sine ullo ad ejusdem figuras, formas, circumstantias, aut motus respectu; aliæ sint leges & vires naturales sive attrahendi sive fugandi ad speciales particularum materiæ figuras, formas, circumstantias, aut motus pertinentes, & peculiari modo iisdem alligatæ, è quibus haud pauca è difficilioribus naturæ phænomenis dependere possunt. Sic sane verosimile videtur aeris particulas cum peculiare illud temperamentum, figuram, aut formam acquisiverint, unde tale fluidum elasticum componere aptæ sunt, quale nos Aerem dicimus, novæ huic & speciali legi sive vi centrifugæ, hujusmodi particulas easque solas attinenti immediate subjici. Jure enim suspicatur Autor noster perspicacissimus pleraque specialia naturæ Phænomena ex viribus hujusmodi pendere posse, quibus corporum particulæ, per causas nondum cognitas, vel in se mutuo impelluntur, & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur, & recedunt; quibus viribus ignotis Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt: & quibus proinde gradatim jam detectis vel detegendis spes

est

eſt non exigua eadem phænomena gradatim patefacienda, & nos ad cauſas ſi non ultimas, proximas tamen, & tam calculo Geometrico quam uſibus humanis accommodatas maxime ſenſim acceſſuros.

Scholium. Intelligenda vero ſunt priora circa vires, aeris & hujuſmodi fluidorum centrifugas de hujuſmodi ſolum viribus quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur: qualium exempla habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus, ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete, quam à lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugent alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida, de quibus actum eſt in hac Propoſitione.

Coroll. (2.) Pari fere ratione præter vim gravitatis univerſalem aliæ eſſe videntur vires attractivæ peculiares particulis quorundam corporum aut peculiares diſtantiis perexiguis aliiſve circumſtantiis corporum particularium, unde phænomena alias miranda conſequi debent. Sic ſane ex hujuſmodi attractione oriri videtur radiorum lucis in corporibus pellucidis aut circa angulos opacorum refractio vel inflexio; utpote quæ ante contactum accidant, & in diſtantia minori fortius attrahunt; uti Auctor noſter in egregio ſuo de Optice tractatu obſervavit. Nec aliunde, uti idem in Latina ejuſdem operis editione notat, oriri videtur ſphærica illa guttularum & argenti vivi & conſimilium fluidorum figura. Particulæ enim ubi ad exiguam diſtantiam collocantur, ſe fortiter attrahunt; atque quo modo ex æquali partium in planetis verſus ſe invicem gravitate, ſphærica planetarum figura neceſſario oritur; eodem etiam ex æquali particularum aquæ vel argenti vivi ſibi mutuo admodum approximantium vi centripeta

æquum

æquum est ut guttularum figuram sphæricam derivemus: præsertim dum hasce particulas quam citissime & quam accuratissime in sphærulas istas coire videmus; uti ex notissimis Iridis phænomenis, instantaneæ earundem & accuratissimæ in sphærulas conformationi in solidum debitis, facile discere licebit.. Neque ex diversa causa forsan nonnulla alia fluidorum phænomena, solutu alias difficillima, pendere sunt censenda. Sed hæc Obiter. Ad seriem incæptam jam revertor.

LX. Quantitas materiæ in corporibus universis eorum ponderi est accuratissime proportionalis.

Sublata enim aeris resistentia, uti fit in vacuo Boyliano, omnia corpora, sive solidissima, & gravissima; sive rarissima, & levissima videantur, communi & data quadam velocitate simul descendunt, ubi simul ab eadem altitudine demittuntur. Corpora etiam pendula quæcunque, quorum centra oscillationis à suspensionis centro æqualiter distant, etiam in aere, si arcum ejusdem vel æqualis cycloidis æqualem, vel etiam inæqualem simul oscillari incipiant, eunt simul redeuntque diutissime: & ubi arcus æqualis describitur, eadem omnino celeritate moventur, sive dura sint, sive mollia; sive solida sint, sive liquida; sive magna sint, sive parva; cujuscunque demum formæ sint, vel figuræ. Unde constat vim moventem esse ubique in eadem ratione cum materia movenda: sive vim gravitatis corpora omnia æqualiter afficere: in eadem nempe à telluris centro distantia. Nam quod magna corpora cæteris paribus in aere paulo velocius descendunt, motusque suos paulo diutius conservant, inde est, quod *superficies* corporum, secundum quam fit aeris vel medii cujusvis resistentia in corporibus similibus sit tantum in diametrorum vel laterum similium ratione duplicata: cum eorundem *soliditas*, secundum quam æstimanda est & materiæ quantitas, & vis gravitatis, sit in diametrorum vel laterum eorundem ratione triplicata. Sic si diameter sphæræ cujusvis lapideæ sit alterius sphæræ ex

eadem

eadem materia tripla; erit ejuſdem ſuperficies, & per conſequens, data velocitate, ejuſdem reſiſtentia in aere, alterius tantum noncupla, ubi ſoliditas, & materiæ quantitas, eique proportionalis ejuſdem gravitas ſit alterius plane vigecupla ſeptupla. Unde mirum non eſt, reſiſtentiam pro ratione gravitatis in ſphæra majore tanto minorem, eandem ſphæram in ratione minore afficere & retardare, quam ſphæram minorem afficit & retardat. Quod vero tanta ſit ponderis in aere v. g. inter aurum & paleam apparens velocitatis deſcenſus differentia, illa non ſolum à ſuperficierum ſed præcipue à gravitatis ſpecificæ differentia qua aurum longe magis quam palea exuperat aeris ipſius gravitatem dependet: exceſſus autem gravitatis ſpecificæ corporis in aere deſcendentis ſupra gravitatem ipſius aeris ſpecificam ea ſola eſt gravitas quæ corpus in aere poſitum ad deſcendendum cogit, uti nuperrime oſtendimus. Unde mirum non eſt, quod aurum longe quam palea velocius in aere deſcendat, licet in vacuo utraque pari ſemper velocitate deſcendere obſerventur.

Scholium. Si ipſa velocitas corporum omnium in vacuo apud telluris ſuperficiem in notis menſuris requiratur, Sciendum, tam per corporum perpendiculariter deſcendentium obſervationem directam, quam per endulorum corporum oſcillationes & calculum inde intum à Cl. Hugenio, conſentientibus Geometris, illam a quantitate ſtatui qua ſcrupulo horario ſecundo corpora per pedes Pariſienſes 15$\frac{1}{12}$. ſive pedes Anglicos 16L1. hoc eſt, pedes ſedecim & pollicem quaſi unum eſcendunt: aut qua horæ ſpatio per pedes Anglicos 08.656.000. hoc eſt, milliariorum Anglicorum fere uadraginta millia deſcenderent: uti ex eodem calculo rporum in duplicata temporis ratione deſcendentium ico conſtare poterit.

LXI. Corporum fune pendulorum quibus reſiſtitur ipſa ſolum velocitatis ratione, oſcillationes in Cyoide, ſive arcus deſcripti ſint majores ſive minores, nt ubique Iſochronæ. Quod

Quod vera ſit propoſitio in loco vacuo, ubi nulla eſt medii reſiſtentia, olim demonſtravimus. Et ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, ſive ut arcus ubique deſcribendus, velocitas reliqua erit quoque in eadem ratione: & proinde oſcillandi tempus æqualiter retardabitur utrinque, & oſcillationes etiamnum manebunt inter ſe, ut prius, Iſochronæ. *Q. E. D.*

Coroll. Media itaque reſiſtentia tempus oſcillandi majus requirunt quam vacuum ſpatium: & horologia oſcillatoria citius aliquantulum vibrationes ſuas æquales in vacuo quam in aere peragunt, conſentiente experientia. Reſiſtentia enim aufert nonnullam gravitatis motricis partem; & proinde effectum ejus ſive motus velocitatem ſufflaminat.

Nov. 25. 1706.

XXIX.

LXII. CORPORIBUS inæquali velocitate in fluido ſubtiliſſimo motis reſiſtitur à fluido in duplicata velocitatis ratione.

Cum enim Corpus velocius motum & majori medii quantitati in ratione velocitatis, & cuique medii parti æquali, cum impetu majori in eadem velocitatis ratione occurrat, reſiſtentia tota ex cauſa utraque conjuncta oriunda neceſſario erit in ejuſdem velocitatis ratione duplicata. Cui quidem rationi duplicatæ experimenta non male conſentiunt. Licet partium in aere cedentium lubricitatis defectus ab elaſticitate ortus, & nonnullis plurimorum fluidorum partium cohæſio iſtam rationem aliquantulum turbare debeant.

Coroll. (1.) Cum itaque corporum fune pendulorum in Cycloide, ubi reſiſtentia eſſet in ſimplici velocitatis ratione oſcillationes eſſent Iſochronæ, Reſiſtentia au-

te-

tem in aere & hujuſmodi mediis ſit fere in velocitatis
ratione duplicata, Liquet oſcillationum tempora etiam
in Cycloide, & multo etiam magis in Circulo, per
terem non eſſe in diverſis arcubus penitus æqualia; ſed
n majoribus, ob reſiſtentiam nimiam, paulo majora.

Coroll. (2.) Hinc ſequitur ad æqualitatem tempo-
um in horologiis oſcillatoriis optime obtinendam opus
ſſe, ut pendula eoſdem arcus ſemper deſcribant: alias
b inæqualem velocitatem, ubi arcus majores deſcri-
ur, tardius; ubi minores, celerius juſto fiet motus.
Jnde etiam cauſa oſtendi poteſt, præter automatorum
ructuram minus perfectam, quare Horologia majora
navi collocata & huc illuc jactata non adeo accurate
domi manentia & in quiete poſita horas demonſtrant.
b concuſſionem enim frequentem arcus nunc majores,
unc minores deſcribuntur: & inde temporis inæqua-
as nonnulla neceſſario conſequitur.

Coroll. (3.) Oſcillationes breviores ſive in Cycloide
e in Circulo ſunt magis iſochronæ quam longiores;
minorem nempe medii perturbantis reſiſtentiam: &
eviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio
n reſiſtente quam proxime: ubi etiam Cyclois &
rculus plane coincidunt, ſive ſe mutuo tangunt: &
illationes in circulo vix differunt ab iis quæ fiunt in
cloide. Unde etiam horologia oſcillatoria quæ pen-
o longiore gubernantur accuratius multo horas indi-
t quam ea quæ breviori alligantur; propterea quod
us longe minores ab iis deſcribuntur. Earum vero
llationum quæ in majoribus arcubus fiunt tempora
t paulo majora, eo quod reſiſtentia corporis, qua
pus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in
enſu deſcriptæ, (ob majorem nempe velocitatem,)
m reſiſtentia in aſcenſu ſubſequenti, qua tempus con-
itur. Sed & tempus oſcillationum, tam brevium,
n longarum nonnihil produci videtur per motum
ii. Nam Corporibus tardeſcentibus paulo minus
ſtitur pro ratione velocitatis, & corporibus accele-

ratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediun-tur: id adeo quia medium eo quem à corporibus acce-pit motu in eandem plagam pergendo in priore casu ma-gis agitatur, in posteriore minus, ac proinde magis v[el] minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igit[ur] in descensu magis resistit, in ascensu minus, quam pr[o] ratione velocitatis duplicata; & ex utraque causa tem-pus producitur.

LXIII. Velocitas prima fluidi cujusque subtilissim[i] per foramen effluentis ea est quam corpora acquirerent d[e]scendendo ab altitudine altitudinis ejusdem supra foram[en] perpendicularis dimidia: & est ubique ad diversas al[ti]tudines in subduplicata earundem altitudinum ratio[ne].

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur, ut [a]qua per foramen defluat, manifestum est quod vas [su]stinebit pondus aquæ totius dempto pondere partis ist[ius] quod foramini perpendiculariter imminet. Nam si fo[ra]men obstaculo aliquo occluderetur, obstaculum sustine[ret] pondus aquæ sibi perpendiculariter incumbentis, & f[un]dum vasis sustineret pondus aquæ reliquæ. Sublato au[tem] obstaculo fundum vasis eadem aquæ pressione, eodem[que] ipsius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obsta[cu]lum sustinebat, cum jam non sustineatur, faciet ut a[qua] descendat & per formam defluat. Unde consequen[s est] quod motus aquæ totius effluentis is erit quem po[ndus] aquæ foramini perpendiculariter incumbentis gene[rare] possit. Nam aquæ particula unaquæque pondere [suo] quatenus non impeditur, descendit; idque motu [uni]formiter accelerato; & quatenus impeditur urgebi[t ob]staculum. Obstaculum illud vel vasis est fundum, [vel] aqua inferior jamjam effluxura; & propterea pon[deris] pars illa quam vasis fundum non sustinet, urgebit a[quam] defluentem, & motum sibi proportionalem generabit[.] cum vis integra premens nil aliud sit quam vis grav[itatis] propria cujusque particulæ, vel supremæ superficiei [...] superaddita vi propriæ cujusque inferioris particula[e] quarumcunque inferiorum superficierum æqualiu[m]

totam altitudinem perpendicularum æqualiter gravitantium; ſive velocitas genita ſummà velocitatum ſingularum ſuperficierum, vel velocitas corporum à quiete deſcendentium æquabiliter aucta: Et cum etiam velocitas Corporis à dimidia altitudine deſcendentis ſit ea quacum integra altitudo eodem tempore motu uniformi deſcribi deberet, & ab eodem gravitatis propriæ exordio incipiens æquabiliter aucta: Liquet eandem velocitatem utrobique generari. Quia vero velocitates corporum deſcendentium ſunt ubique in ſubduplicata ratione altitudinum, Erunt & velocitates effluentium, iiſdem æquales, in eadem ratione ſubduplicata. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Quantitas itaque aquæ effluentis quo tempore corpus cadendo deſcribere poſſet altitudinem dimidiam, æqualis erit columnæ aquæ totius foramini perpendiculariter imminentis.

Coroll. (2.) Cum autem aqua effluens motu ſuo primo ſurſum verſo perpendiculariter ſurgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis, conſequens eſt quod ſi egrediatur oblique per canalem in latus vaſis, deſcribere incipiet in ſpatiis non reſiſtentibus Parabolam, cujus latus rectum ad verticem ubi incipit curvatura, vel finit canalis, pertinens, eſt dupla altitudo aquæ in vaſe ſupra canalis orificium; & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur: atque ordinatim applicatæ parallelæ ſunt tangenti per canalis axem ductæ.

Coroll. (3.) Data ergo parabola ab aqua effluente deſcripta, datur una aquæ in vaſe contentæ altitudo ſupra foramen perpendicularis; nempe lateris recti ad verticem effluxus pertinentis dimidia.

Coroll. (4.) Si aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur, quoniam fundum vaſis integrum eſt, & eadem aquæ incumbentis preſſione ubique urgetur, ac ſi aqua non efflueret; vas ſuſtinebit pondus aquæ totius, non obſtante effluxu: Sed latus vaſis, de quo effluit, non ſuſtinebit preſſionem illam omnem quam ſuſtineret ſi aqua non efflueret. Tolletur enim preſſio partis illius

lius ubi perforatur, quæ quidem preſſio, ob naturam aquæ fluidam, æqualis eſt ponderi columnæ aquæ cuju baſis foramini æquatur, & altitudo eadem eſt quæ aqua totius ſupra foramen. Et Propterea, ſi vas ad modum corporis penduli filo prælongo à clavo ſuſpendatur, ho ſi aqua in plagam quamvis ſecundum lineam horizontalem effluat, recedet ſemper à perpendiculo in plagam contrariam. Et par eſt ratio, ut hoc obiter notetur motus pilarum quæ pulvere tormentario madefacto implentur, & materia in flammam per foramen paulatim expirante recedunt à regione flammæ, & in partem contrariam cum impetu feruntur.

Coroll. (5.) Eadem eſt velocitas exeuntis fluidi in a qua, & in aere, & aliis quibuſcunque, modo ſubtiliſſim ſint, ubi altitudo perpendicularis eſt eadem, uti e præcedente demonſtratione liquet.

Coroll. (6.) Et ſi fluidum ſit elaſticum, & Und lationes ſive tremores ſuos ad diſtans propagare poſſ Undulationes vel Tremores iſtos eadem velocitate prop gabit qua primo efflueret ex altitudine Fluidi Unifo mis, cujus pondus fluidum ſubjectum comprimere poſſe Tenſio enim ſive elaterium iſti preſſioni ſive velocit incipienti proportionale eſt ipſum undulationis vel tr moris vehiculum: & proinde undulationes vel trem res iſtos cum velocitate propria non poteſt non transfe & propagare.

Coroll. (7.) Unde cum pondera ſpecifica aquæ p vialis & Argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad 14. c citer; & ubi Mercurius in Barometro altitudinem tingit digitorum Anglicorum 30. pondus elaſtici A & aquæ pluvialis ſint ad invicem, ex collatis plu mis obſervatis, ut 1 ad 1000 circiter; erunt pond ſpecifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 14000 circi Proinde, cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitor altitudo aeris uniformis cujus pondus aerem noſtr ſubjectum comprimere poſſet, erit 42000 digitor ſeu pedum Anglicorum 35000. Corpora autem p

175

17500; hoc eſt, altitudinem prioris dimidiam; ſpatio 33 quaſi minutorum ſecundorum in vacuo deſcendunt. Unde Undulationes vel Tremores aeris iſti, quos ſonorum vehicula ſtatuimus, ea ſe propagabunt velocitate ut ſpatio 33 ſcrupulorum ſecundorum pedes Anglicos 35000 circiter conficiant, & ex æquabili propagationis tenore ſcrupulo ſecundo unico 1060 pedes circiter; ſive ſcrupulo primo integro 63640 circiter: quæ quidem Sonorum velocitas cum experimentis probe congruit. Scribit enim Merſennus in Baliſticæ ſuæ *Prop.* 35. ſe factis Experimentis inveniſſe quod ſonus minutis quinque ſecundis hexapedas Gallicas 1150, (id eſt pedes Gallicos 6900) percurrat. Unde cum pes Gallicus, ſit ad Anglicum, ut 1068, ad 1000; debebit ſonus tempore minuti unius ſecundi pedes Anglicos 1474 conficere. Scribit etiam idem Merſennus Robervallum Geometram Clariſſimum in Obſidione Theodonis obſervaſſe Tormentorum fragorem exauditum eſſe poſt 13 vel 14 ab igne viſo minuta ſecunda; cum tamen vix dimidiam Leucam ab illis Tormentis abſuerit. Continet Leuca Gallica hexapedas 2500; adeoque ſonus tempore 13 vel 14. ſecundorum ex obſervatione Robervalli confecit pedes Pariſienſes 7500, ac tempore unius ſecundi pedes Pariſienſes 560, Anglicos vero 600 circiter. Multum differunt hæ obſervationes ab invicem; & computus noſter medium locum tenet. In Porticu Collegii SS. Trinitatis apud nos pedes 208 longa, ſonus ex ipſius Newtoni obſervatis in termino alterutro excitatus quaterno recurſu Echo quadruplicem efficit, & ſingulis ſoni recurſibus pendulum quaſi ſex vel ſeptem digitorum longitudinis oſcillabatur; ad priorem ſoni recurſum eundo, & ad poſteriorem redeundo. Longitudo penduli ſatis accurate definiri non potuit: ſed longitudine quatuor digitorum oſcillationes nimis celeres, ea novem digitorum nimis tardæ videbantur. Unde ſonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quam pendulum digitorum no-

novem, & majore quam pendulum digitorum quatuor oſcillatur; id eſt, minore tempore quam $28\frac{3}{4}$ minutorum tertiorum; & majore quam $19\frac{1}{6}$. & propterea tempore minuti unius ſecundi conficit pedes Anglicos plures quam 866, & pauciores quam 1272; atque adeo velocior eſt quam pro obſervatione Robervalli, ac tardior quam pro obſervatione Merſenni. Quin etiam accuratioribus poſtea obſervationibus definivit Newtonus quod longitudo penduli major eſſe deberet quam digitorum quinque cum ſemiſſe, & minor quam digitorum octo; adeoque quod ſonus tempore minuti unius ſecundi confecit pedes Anglicos plures quam 920, & pauciores quam 1085. Igitur motus ſonorum ſecundum calculum geometricum ſuperius allatum inter hos limites conſiſtens, & ad numerum majorem accedens propius, ſicut pleraque aliorum experimenta perſuadent, optime cum Phænomenis quadrat.

Coroll. (8.) Si denſitas aeris augeatur aut minuatur ſonus ipſe ſive fragoris violentia in eadem ratione augebitur aut minuetur; quod cum experimentis ſonorum in aere rarefacto & condenſato factis probe congruit.

Coroll. (9.) Unde ſequitur, ſonos in altiſſimorum montium cacuminibus, ubi aer rarior eſt, minores eſſe, & tardiores, quam in vallibus.

Coroll. (10.) Si Ventus cum motu aeris conſpire ſonitus, vel fragor, ſive pulſuum violentia augebitur, & longius perget; utpote ex *ſumma* motuum ipſius ſo & venti conflata. Si Ventus eidem motui repugne ſonitus minuetur, & citius ſiſtetur; utpote ex *differentia* motuum eorundem ſolummodo oriundus. Sal ſemper ipſius ſoni propagati velocitate ſuperius defi nata. Sonus enim non ex motu aeris continuo, ſed pulſibus ejuſdem undarum more per vibrationes ſive it reditusque vicibus alternis ſe invicem ſequentes prop gatis dependet; uti ſtatim oſtendetur. Et qualiſcu que ſit fragoris differentia, à differenti corporis ſon vel venti ſtatu orta, manent tamen aeris denſitas & e

teriu

terium; & inde manebit quoque eorum effectus, sive sonorum propagatorum velocitas.

Coroll. (11.) Eadem itaque fere velocitate Soni qualescunque, sive magni sint, sive parvi, per aerem densitate datum propagantur: Uti ostendunt quoque ea de re experimenta à Philosophis capta.

Coroll. (12.) Data itaque jam sonorum ubicunque locorum velocitate, ea nempe qua 1060 pedes Anglicos scrupulo secundo conficiunt, Ex dato sonorum temporis intervallo datur una distantiæ corporis sonori intervallum. Sic sane si inter Bombardæ ignem visum, auditumque sonum decem minuta secunda pertransire observemus; liquet bombardam à nobis 10600 pedes, sive mille passus duos circiter distare. Pariter si inter fulgur visum & tonitru auditum intercedant minuta secunda quinque; liquet nubes istas unde erumpunt à spectatore 5300 pedes, sive quasi millepassum unicum distare.

Scholium. Notandum autem hic loci, me velocitatem sonorum paulo quam ipse Auctor majorem ponere; utpote quæ, ut opinor, tum calculo geometrico, tum experimentis plerisque accuratius congruit.

Decemb. 2°. 1706.

XXX.

LXIV. RESISTENTIA Fluidorum ut in diversis velocitatibus est in ratione duplicata velocitatis; ita in diversis densitatibus data velocitate in ipsa densitatis ratione directa: datis autem densitate & velocitate in diametrorum ratione duplicata: atque adeo in universum Resistentia est in ratione composita ex duplicata ratione velocitatis; ex duplicata ratione diametrorum; & ex simplici ratione densitatis medii directe.

Facilia hæc ſunt, nec demonſtratione indigent. Si enim ſphæræ duæ quoad diametros altera alteram in ratione dupla excidat, ſive ſit ut 2 ad 1 : & moveatur major velocitate alterius dupla; & in medio fluido alterius denſitate duplo; palam eſt, dato quovis temporis ſpatio, univerſam ſphæræ majoris reſiſtentiam, ſive motum amiſſum, eſſe ad univerſam ſphæræ reſiſtentiam, ſive motum amiſſum, ut $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$, 2, ad $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$, ſive, ut 32 ad 1. atque ita ubique. Notandum tantum corporum reſiſtentiam à fluidis & à ſolidis cæteris paribus æqualiter oriri; niſi quatenus in motibus tardioribus medium fluidiſſimum, impetu per circulum in poſticam projectorum vel motorum corporum partem facto, aliquantulum ea iterum promovere poſſit: quod in velocioribus minus fieri debet, & in longe velociſſimis neutiquam: uti quoque per experimenta accuratiſſime inſtituta Auctor noſter Celeberrimus rem ſe habere deprehendit.

Coroll. (1.) Media itaque in quibus corpora projectilia ſine ſenſibili motus diminutione longiſſime progrediuntur, non ſolum fluidiſſima ſunt, ſed etiam longe rariora quam ſunt corpora illa quæ in ipſis moventur: alias projectorum motum cito ſiſterent, & ad quietem reducerent.

Coroll. (2.) Unde ſequitur aerem noſtrum, ſive omnem materiam in aere contentam parvam eſſe, ſi cum materia in corporibus per eandem longiſſime & velociſ- ſime progredientibus componatur; tantumque à Plen Carteſiano abeſſe, ut ne millecuplam ſpatii integri con- tinentis partem revera occupet.

Coroll. (3.) Unde etiam ſequitur, ætherem, ſive ma- teriam omnem in ſpatiis planetariis contentam, per quam Planetæ tot millenniis tanta cum velocitate revolverunt idque ſine omni fere motus jactura, perexiguam ſan- eſſe, ſi cum materia in ipſis planetis contenta compare- tur: ita ut, quod inſtituto calculo facile patebit, ſp-

tiu

tium potius revera vacuum, quam æthercam aliquam materiam nuncupare præſtiterit.

Coroll. (4.) Corruit ergo in univerſum Philoſophia Carteſiana, materiæ cuidam cæleſti, quam materiam tum *primi* tum *ſecundi elementi* appellat, in ſolidum inædificata. Neque exploſa jam per experimenta atque demonſtrata Newtoniana materia hac ſubtili, Hypotheſeωs Carteſianæ baſi & fundamento, ultra ſubſiſtere figmentum iſtud ingenioſum ullo modo poteſt. Præſertim cum non ſolum plenitudinem materiæ iſtius ſubtilis ſuſtulerit Newtonus, ſed & nihil omnino hujuſmodi materiæ Corporum poris ineſſe oſtenderit. Per experimentum enim penduli prælongi in aere diutius oſcillantis & motum inde amiſſum cum aeris reſiſtentia in ſuperficiem facta collatum æſtimando, invenit, aut nullam omnino, aut plane inſenſibilem reſiſtentiam in partibus internis oriri. Unde recte concludendum, nullam omnino, aut plane inſenſibilem eſſe in poris corporum materiæ cujuſvis ſubtilis quantitatem: cum è contra ex Carteſii plenitudine, cum ſpecifica penduli gravitate collata, debuerit eſſe quam ipſa penduli ſubſtantia longe major. Omnino contra experientiam.

LXV. Preſſio quævis rectilinearis per fluidum ſecundum lineas rectas ſolas propagari nequit.

Cum enim fluidum ſit ea natura ut aut ejus partes ſint ſemper in motu omnifariam, aut ſaltem facillime omnifariam mobiles, & data quavis occaſione revera motæ; atque adeo particulæ ſitu & loco admodum variæ & obliquæ quoad ſe invicem ſemper exiſtant; fieri non poteſt quin preſſio quævis etiam per rectam lineam primitus communicata particulas oblique poſitas plerumque urgeat; & illæ oblique poſitæ alias oblique etiam poſitas pariter urgeant; & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur quamprimum propagatur ad particulas quæ non accurate in directum jacent, divaricare incipiet, & oblique propagabitur in infinitum: & poſtquam incepit oblique propagari, quotieſcunque incide-

rit

rit in particulas ulteriores quæ non in directum jacent, hoc est, fere semper, iterum divaricabit. Sic etiam si pressionis à dato loco per fluidum propagatæ pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur pariter ac prius divaricabit in spatia quævis ultra obstaculum.

Coroll. (1.) Hinc ratio redditur, quare Soni vel muris interpositis, vel in cubiculum per fenestram admissi, sese in omnes cubiculi partes dilatent; inque angulis omnibus audiantur, non solum reflexi quidem à parietibus oppositis, sed & à fenestra per aerem undique propagati.

Coroll. (2.) Lucis radii qui per ætherem, & aerem, & aquam aliaque fluida per rectas lineas semper propagantur, non sunt pulsus quidam per fluida ista, sonorum instar, propagati; sed particulæ seu corpuscula realia à Sole & stellis emanantia, & per pellucida media quæcunque vero motu propagata; ut etiam alia pleraque lucis phænomena omnino suadent.

LXVI. Corpus omne Tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum: In medio vero non elastico motum per circulum excitabit.

CASUS (1.) Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo comprimentes easdem & condensabunt: dein reditu suo sinent partes compressas recedere, & sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores: & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. E

prop

propterea non omnes ſimul ibunt, & ſimul redibunt; (ſic enim datas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices;) ſed accedendo ad invicem, ubi condenſantur; & recedendo, ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt, dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes, & eundo condenſatæ ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus: & propterea pulſus ſucceſſivi à corpore omni tremulo per fluidum elaſticum propagabuntur: idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſingulis ſingulos pulſus excitat. *Q.E.D.*

Corollarium. Quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per medium fluidum propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & à corpore illo tremulo, tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas undique propagabuntur. Cujus etiam rei aliquod exemplum habemus in Undis: quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagas motus digiti, ſed in modum circulorum concentricorum digitum ſtatim cingent, & undique propagabuntur. Nam Undarum gravitas ſupplet quodammodo locum vis elaſticæ.

Coroll. (2.) Hinc colligi poteſt, quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicetur in eorum progreſſu. Lineola enim quævis phyſica quamprimum ad locum ſuum primum ſemel rareſcendo redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum, qui à corpore tremulo propagantur, novo motu cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus à corpore tremulo propagari deſinunt.

Coroll. (3.) Unde facile innoteſcit cauſa, cur Soni, ceſſante motu corporis ſonori, ſtatim ceſſant; neque

diu-

diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus, quam cum proxime abſumus. Ceſſante enim Cauſa, Ceſſare effectum eſt Neceſſe.

Coroll. (4.) Hinc etiam cauſa intelligi poteſt, cur Soni in Tubis ſtenterophonicis valde augeantur. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in Tubis, dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur, & fortius recurrit; & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et cum omnis ille corporis aut vocis ſonoræ impetus, qui alias ad ſphæram uſque integram, cujus radius eſſet tubi longitudo, eodem tempore propagari debuiſſet, nunc intra tubi ſpatiū concavum concludatur, & ex ejuſdem apertura junctis viribus exeat, obſcurum eſſe non poteſt, tremulum aeris motum, ſive pulſuum ſonorum violentiam longe exinde augeri, & ita ad intervalla longe majora pervenire debere: ita tamen ubique, ut propagationis velocitas eadem etiamnum ac prius atque invariata permaneat. Ea autem, ut opinor, ratione ſonus augetur in hiſce tubis, ut omnem fere ejuſdem quantitatem, quæ alias dato tempore ſuperficiem ſphæricam cujus radius ſit tubi longitudo, occuparet intra aperturam tubi coarctetur. Id eſt, in ratione ſuperficiei ſphæricæ integræ, ad ejuſdem partem intra tubi aperturam contentam quam proxime. Operæ autem pretium videtur ut adhibeantur experimenta huc ſpectantia, quo determinetur tandem, num ſonorum per hoſce tubos augmentum rationem jam definitam obtineat, necne: ut de iiſdem in poſterum certius pronunciare, eoſdemque utilius tractare atque uſibus humanis adhibere valeamus.

Cas. (2.) Quod ſi medium non ſit elaſticum; quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium facillime cedit: hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuum à tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quo-

quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus non recedit in infinitum, sed in circulum eundo pergit ad spatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur, & ad locum suum priorem redibit.

Corollarium. Hallucinantur igitur Cartesiani, qui credunt agitationem partium flammæ sive Solis ad pressionem seu lucis propagationem per medium ambiens secundum lineas rectas conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium flammæ, vel Solis, sed à totius dilatatione derivari. Atque hæc impræsentiarum sufficiant. Reliqua Termino post Natalitia proximo expectabitis.

Decemb. 9°. 1706.

XXXI.

LXVII. SI Cylindrus solidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem suum positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perserveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; Tempora periodica partium fluidi erunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri directe; & velocitates ubique æquales.

Distinguatur enim fluidum in orbes solidos cylindricos innumeros cylindro concentricos, ejusdem ubique crassitudinis. Et quoniam fluidum supponitur esse homogeneum, & Cylindrus motu suo circulari conatur omnes fluidi partes contiguas, & per partes contiguas partes ulteriores in infinitum communi suo motu angulari,

lari, atque adeo velocitate in ratione diſtantiæ directa concitare, & ſecum eodem tempore periodico circumvolvere; Liquet orbes quoſcunque tum demum ceſſare ab ulteriori acceleratione, & partes perſeverare in motibus ſuis uniformiter, ubi reſiſtentia ſive impreſſio in partem concavam, æquetur reſiſtentiæ vel impreſſioni in partem convexam; (alias enim prævalente vi fortiori motus ex iſta parte mutabitur.) Proinde, ubi velocitas reſpectiva, ſecundum quam in data ſuperficie orietur reſiſtentia, fuerit in ipſa ſuperficiei ratione reciproca, Impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem erunt æquales: Id eſt, in hoc caſu ubi velocitas angularis ſit in ipſa diſtantiæ ratione reciproca, ſive ubi velocitas abſoluta ſit ſemper æqualis, & tempora periodica in ipſa diſtantiæ ratione directa. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si fluidum non ſit infinitum, ſed in vaſe cylindrico contineatur, circumagetur etiam cylindrus exterior, & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque & fluidi incluſi æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua continuo impreſſa motum ſuum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Coroll. (2.) Cum autem Planetarum tempora periodica non ſint in ratione ipſa diſtantiarum à Sole, ſed in ejuſdem ſeſquialtera; atque proinde velocitates abſolutæ non ſint ubique æquales, ſed in ſubduplicata diſtantiarum ratione; uti apud omnes Aſtronomos eſt in confeſſo; Liquet hujuſmodi fluidi ætherei conſtitutionem ſyſtemati Solari minime convenire; nec ex eadem ſuppoſita quicquam auxilii vorticibus Carteſianis accedere.

LXVIII. Si ſphæra ſolida in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum, uniformi cum motu, revolvatur; & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; Tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ.

Di-

Distinguatur fluidum in orbes sphæricos innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Et, ut prius, tum solum perseverabit fluidum in motu suo uniformi, sine ulteriore acceleratione vel retardatione, ubi motus angulares partium fluidi circa axem globi sint reciproce ut ipsæ superficies sphæricæ concentricæ, sive ut quadrata distantiarum à centro globi reciproce, sive demum, ut tempora periodica partium, iisdem velocitatibus angularibus reciproce proportionalia, sint ut quadrata distantiarum à centro globi directe.

Coroll. (1.) Si fluidum non sit infinitum, sed in vase sphærica contineatur, circumagetur etiam vas sphæricum, & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica sphæræ, & vasis, fluidique inclusi æquentur inter se. Quod si vas sphæricum violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi sphæra vi aliqua continuo impressa motum suum conservet, efficiet ut idem, velut in casu priori, paulatim cesset.

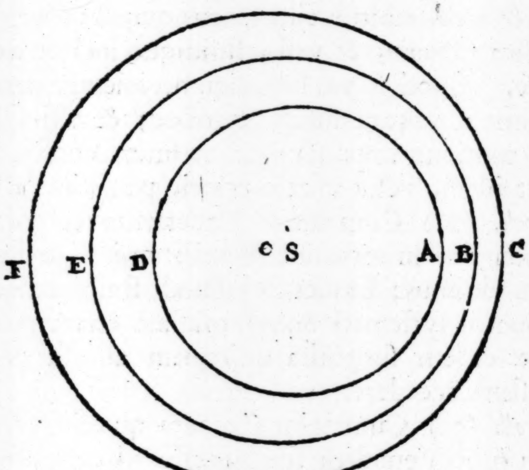
Coroll. (2.) Cum autem Planetarum tempora periodica non sint in ratione distantiarum à Sole duplicata; uti jam vidimus; Liquet hujusmodi fluidi ætherei constitutionem systemati Solari minime etiam convenire; nec ex eadem supposita quicquam auxilii vorticibus Cartesianis accedere.

Coroll. (3.) Cum enim Corpora quæ in vortice delata in orbem eundem sine accessu ad centrum, vel ab eodem recessu perpetuo redeunt; (uti in omnibus planetis tum primariis tum secundariis res se habet;) ejusdem ut sint densitatis cum vortice, & simul cum partibus contiguis ferantur sit necesse: & cum Vortices hujusmodi debeant ita moveri, ut tempora periodica sint in duplicata distantiarum ratione; (contra quam fit in omnibus planetis;) Liquet Planetas à Corporeis vorticibus non deferri. Quod etiam adhuc certius ex proxima Propositione constabit.

LXIX. Velocitates Planetarum omnium sive primariorum, sive secundariorum circa corpora sua centralia, in ratione

tione nempe ſubduplicata diſtantiarum ab illis centris reciproca, Vorticum Carteſianorum hypotheſin omnino ſubruunt, & è medio tollendam demonſtrant.

Planetæ enim, ut jam ubique notum, circa ſuum quique centrale corpus ita in Ellipſibus, umbilicos in eorum centris habentibus moventur, ut radiis ad centra ductis areas deſcribant temporibus proportionales; & ut velocitates ſint in ſubduplicata diſtantiarum ratione reciproca. At Partes vorticis ætherei tali motu revolvi nequeunt. Deſignent enim *AD*, *BE*, *CF*, Orbes tres primarios circa Solem *S* deſcriptos: quorum



extimus *CF* circulus ſit Soli concentricus; & interiorum duorum Aphelia ſint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF* radio ad Solis centrum ducto areas temporibus proportionales deſcribendo movebitur uniformi cum motu; Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE* tardius movebitur in aphelio *B*, & velocius in perihelio *C*, ſecundum leges Aſtronomicas, & demonſtratis Geometricis & obſervatis cæleſtibus innixas; cum tamen ſecundum leges mechanicas

mechanicas materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*: id eſt, in aphelio velocius quam in perihelio: Quod fieri per obſervata non poteſt. Sic ſane, exempli gratia, In principio ſigni Virginis, ubi Martis aphelium jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad eorundem diſtantiam in principio ſigni Piſcium in ratione fere ſeſquialtera; ſive ut tria ad duo. Et propterea Materia Vorticis inter orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione eadem ſeſquialtera. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi terra in hac materia cœleſti relative quieſcens ab eadem deferatur, & una circa Solem revolvatur, foret hujus velocitas in principio Piſcium, ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis, in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus annuus apparens unius diei tempore, in principio Virginis major eſſet quam 70′, & in principio Piſcium minor quam 48′. cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus velocior ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis; & propterea Terra velocior in principio Virginis quam in principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat; & non tam ad explicandos, quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit.

Scholium. Hactenus Principia Philoſophiæ Naturalis à Cl. Newtono tradidimus. Non tamen proprie loquendo ea Philoſophice, vel Phyſice, ſed Mathematice potius tradidimus. Generales quippe motuum & virium leges & conditiones Aſtronomiam & Philoſophiam Naturalem maxime ſpectantes hucuſque methodo præcipue Mathematica & univerſali Conſideravimus. Omnia tamen, ne ſterilia viderentur, Scholiis paucis & Corollariis Aſtronomicis, Phyſicis, & icis etiam, atque Mechanicis per totam tractationis

ſeriem ubique illuſtravimus: atque ita veræ Philoſo-phiæ & Aſtronomiæ, hoc eſt, Newtonianæ, haud pa-rum præluſimus, & viam ſtravimus. Supereſt jam ut ad ipſam Rerum Naturam & Philoſophicas phænomeno-rum tum Aſtronomicorum cum Phyſicorum cauſas, & verum Mundi Syſtema diveniamus; & ut ejuſdem Sy-ſtematis Conſtitutionem, quatenus ex principiis prius poſitis dependet, doceamus: omiſſis hic loci aut leviter tactis iis quæ prius inter prælegendum per Scholia vel Corollaria huc ſpectantia obſervavimus. Sed cum No-vum materiæ campum & Tertium Newtoni Librum ingreſſuri ſimus, paululum reſpirare præſtiterit. Manum itaque de Tabula.

Jan. 29°. $170\frac{6}{7}$.

XXXII.

LXX. PLANETÆ Sex Primarii, cum ſuo quiſqu ſi quod habent, Satellitio Solem Orbibus ſu cingunt; vel circa Solem revolvunt.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex e rum phaſibus phaſes Lunares ad amuſſim referentib quod per obſervata Teleſcopica ubique jam notum, quido demonſtratur. Nonnunquam enim plena fa circa ipſas conjunctiones diametris Apparentibus t minimis, lucent; ultra Solem nimirum ſiti; & ple lunium imitati: nonnunquam obſcura facie circa c junctiones alteras, diametris apparentibus tum maxi viſuntur; citra Solem nimirum poſiti, & novilun imitati. Et pariter facie gibba aut cava circa octan dimidiata atque dichotoma circa quadras, Lunæ ad ſtar; per diſcum Solis aut inſtar macularum nonn quam tranſeunt; partialem eclipſin inducentes: N

nunq

nunquam vero ultra Corpus Solare pertranseunt nobis interea invisibiles. Unde certum est, hosce Planetas Solem circumire, & orbibus suis Solem non autem Terram cingere. Et quanquam Mercurius ita raro videatur, nempe circa elongationes solum maximas, & dum per Solem transit, ut non ita clare omnes istæ phases actu observari queant; Cum tamen quæ Mercurii phases videri possunt, huic posituræ respondent optime, & cum eæ Veneris, ejusdem conditionis Planetæ, observationibus frequentissimis aptæ sint, & ubique plenario respondeant, non est quod de reliquis etiam in Mercurio dubitemus. Ex Martis quoque plena facie prope Solis Conjunctionem, & gibbosa facie in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. Idem etiam de Jove & Saturno, ex eorum faciebus semper plenis, ut ad tantam distantiam accidere debuit, demonstratur. Quanquam enim hi Planetæ facies suas à plenitudine nonnihil diminutas circa quadras ostentare debeant; Cum tamen ista lucis diminutio tantilla esse debeat ut inter observandum vix aut ne vix quidem ullo pacto posset sentiri, plena horum facies cum hac positura optime congruere est censenda. Quod vero Telluris Orbita Solem cingit, è parallaxi annua alibi exposita abunde constat.

Corollarium. Hinc cum Cartesio, reliquisque etiam superioris seculi Astronomis, colligimus Systema Mundi Ptolemaicum, per tot retro secula ante Copernicanum unice excultum & celebratum, in nihilum abire. Quin & colligimus, Systema Mundi Tychonicum, à tot & tantis Astronomis postea receptum & nobilitatum penitus corruere: nec cum phænomenis nuperrime observatis ullatenus congruere. Tandem colligimus, Systema Copernicanum ab optimis Astronomis plerisque omnibus aliquamdiu approbatum, Verum esse Mundi Systema, & Planetarum omnium ordinem ipsi rerum naturæ & observatis Astronomicis congruentem unice exhibere. Mirum itaque videri debet Astronomiæ Newtonianæ vel Copernicanæ Interpretem Optimum Cl. Gregorium,

 systema-

ſyſtematis veri adeo gnarum, tantum olei & operis in falſis iſtis aliiſque id genus imaginariis hypotheſibus tradendis & exornandis inſumere animum induxiſſe ſuum. Ubi certo certius conſtat Copernicanum Planetarum Ordinem Verum eſſe & genuinum; reliquaſque hypotheſes fictitias plane eſſe cerebri humani fætus; Quorſum ipſam veritatem meris umbris, & naturam rerum inficetis mendaciis immiſcere ſtudemus? Exulent itaque, in æternum exulent, ſyſtemata iſta quondam nobiliſſima, quondam celeberrima è campo noſtro Aſtronomico: & Admittatur illud ſolum, excolatur, exornetur, Quod rerum conditarum vero ordini, veriſque cauſis naturalibus unice correſpondere tandem aliquando grati agnoſcimus. Sed hæc Obiter.

LXXI. Planetarum ſex Primariorum Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera mediocrium diſtantiarum à Sole. Hæc à Keplero primum inventa ratio Philoſophiæ Newtonianæ Parens, in confeſſo jamjam eſt apud omnes. Ac de Temporum Periodicorum menſura convenit inter Aſtronomos Univerſos: Magnitudines autem Orbium Idem Keplerus & Bullialdus omnium diligentiſſime ex obſervationibus determinaverunt & diſtantiæ mediocres quæ temporibus periodicis reſpondent non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas ill adinvenerunt; ſuntque inter ipſas utplurimum intermediæ, uti in Tabula ſequente videre licet.

Planetarum diſtantiæ mediocres à Sole.

	Saturn.	*Jup.*	*Mart.*	*Terræ.*	*Ven.*	*Me*
Sec. Keplerum.	951000	519650	152350	100000	72400	388
Sec. Bullialdum.	954198	522520	152350	100000	72398	385
Sec. Temp. Period.	953806	520116	152399	100000	72333	387

Planetarum autem Veras Periodos jam dabimus: Diſtantias etiam à Sole Veris proximas, ex parallaxi mirum Telluris Flamſtediana 10 ſecundorum.

		D.	H.	′.
Mercurius	*circa Solem revolvit ſpatio*	87	23	16
Venus		224	16	49
Terra cum Luna		365	6	9
Mars		686	23	27
Jupiter cum Satellitibus 4.		4332	12	20
Saturnus cum Satellitibus 5.		10759	6	36

Mercurius	*diſtat à Sole*	32.000.000	*Mille-paſſus Anglicos.*
Venus		59.000.000	
Terra		81.000.000	
Mars		123.000.000	
Jupiter		424.000.000	
Saturnus		777.000.000	

Quod autem methodos attinet diſtantias haſce inveniendi, ſic ſtatuendum. De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole cum Telluris diſtantia collatis Diſputandi non eſt locus; cum hæ per eorum Elongationes à Sole Maximas facili obſervatione notas, ex Trigonometria plana colligantur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole ex arcu retrogradationis facile deducendis tollitur inſuper omnis diſputatio per eclipſes Satellitum Jovis ad calculum accuratum juxta hanc diſtantiam reductas, & cum phænomenis congruentes. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit: & eo nomine habetur Jovis Longitudo Heliocentrica. Longitudo autem Jovis Geocentrica per obſervationes immediate habetur. In triangulo itaque plano Solis, Jovis, & Telluris centra connectente dantur omnes anguli, & proinde ratio Laterum etiam datur: Sive Ratio Diſtantiarum Jovis & Terræ à Sole.

Corollarium. Datur itaque diſtantiarum à Sole Ratio in omnibus Planetis accurate. Quod ſi qua diſtantia ſemel in menſura nota, puta millepaſſibus vel telluris ſemidiametris data eſſet accurate, Omnium diſtantias veras

ras una accurate datas habuissemus: Quod quidem etiamnum desideratur.

LXXII. Planetæ sex primarii radiis ad solem ductis areas temporibus æqualibus semper æquales, & in universum areas temporibus semper proportionales describunt.

Hæc etiam areæ descriptæ æquabilitas ejusdem Kepleri observationi primario debetur: quæ Alter philosophiæ Newtonianæ Cardo merito audire debet: & est apud omnes in confesso. Planetæ quidem quinque reliqui respectu Telluris nostræ nunc progrediuntur; nunc stationarii sunt; nnnc etiam regrediuntur. At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis, ac tardius in Apheliis; sic ut arearum descriptio sit æquabilis. Propositio hæc Astronomis in universum notissima in Jove adprime demonstratur per Satellitum eclipses ad calculum redactas huic hypothesi innixas & apparentibus ad amussim congruas. Hisce enim Eclipsibus Heliocentricum Jovis Locum sive Longitudinem & Distantiam à Sole accuratissime determinari jam diximus.

LXXIII. Luna radio ad centrum Terræ ducto aream tempori æquali semper æqualem fere, & in universum aream tempori fere proportionalem semper describit.

Patet hoc ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente, ejusdem distantiæ tantum non reciproce proportionali, collata. Tempori autem aream non accurate sed *fere* proportionalem asserui, quod perturbatur ista areæ proportionalitas aliquantulum à vi Solis; uti olim explicuimus. Sin istam perturbationem aliunde natam demamus, Propositio erit æque accurata in Luna, ac est in reliquis Planetis; idque propter eandem prorsus rationem.

LXXIV. Planetæ circumjoviales radiis ad centrum Jovis ductis areas describunt temporibus quidem æqua-

libu

libus ſemper æquales, & in univerſum temporibus ſemper proportionales. Eorumque Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum ab ipſius centro.

Conſtat pars Propoſitionis utraque ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes enim horum Satellitum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora etiam Periodica eſſe in ratione ſequialtera ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronomi. Et Cl. Flamſtedius, qui omnia micrometro & per eclipſes Satellitum accuratius definivit, literis ad ipſum Newtonum datis; quinetiam numeris ſuis cum ipſo communicatis ſignificavit rationem illam ſeſquialteram tam accurate obtinere quam ſit poſſibile ſenſu deprehendere, Id quod ex Tabellis ſequentibus erit manifeſtum.

Tempora Periodica.

	D.		H.		′.
1	1	—	18	—	$28\frac{3}{5}$
2	3	—	13	—	$17\frac{9}{10}$
3	7	—	3	—	$59\frac{3}{5}$
4	16	—	18	—	$5\frac{1}{3}$

Diſtantiæ à Centro Jovis.

	1	2	3	4	
E Caſſin.	5	8	13	23	*Semidiam. Jovis.*
Borello.	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	
Townleo per microm.	5L51	8L78	13L47	24L72	
Flamſtedio per microm.	5L31	8L85	13L98	24L23	
Flamſt. per eclips. Satel.	5L578	8L876	14L159	24L903	
Ex Tempor. Period.	5L578	8L878	14L168	24L968	

LXXV. Planetæ Circumſaturnii radiis ad centrum Saturni ductis areas deſcribunt temporibus quidem æqualibus ſemper æquales; & in univerſum temporibus ſemper proportionales. Eorumque Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum ab ipſius centro.

Conſtat etiam pars utraque ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes enim horum ſatellitum vix differunt ſenſibiliter à circulis Saturno concentricis; & motus eorum in his circulis propemodum uniformes deprehenduntur. Tempora etiam Periodica eſſe in ratione ſeſquialtera ſemidiametrorum orbium ſequentes Tabellæ, quas è Cl. Hugenio hic damus, cuilibet rem ad calculum revocanti demonſtrabunt.

Coſmotheor. Pag. 101. 102.

	Tempora Periodica.					*Diſtantiæ à centro Saturni.*	
	D.	H.	′.	″.			
1	1	21	18	31	1	$\frac{39}{40}$	
2	2	17	41	27	2	$1\frac{1}{4}$	*Diametr.*
3	4	13	47	16	3	$1\frac{3}{4}$	*Annuli.*
4	15	22	41	11	4	4	
5	79	7	53	57	5	12	

Hiſce ita expoſitis, æquum eſſet ut Gravitatis Vires & Legem ex iiſdem deduceremus. Sed hæc Prælectioni proximæ deputabimus.

Novemb. 17. 1707.

XXXIII.

LXXVI. VIRES quibus ſex Planetæ Primarii cum ſatellitibus ſuis perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, Solem reſpiciunt; & ſunt reciproce ut quadrata diſtatiarum ab ipſius centro.

Ob æquabilitatem enim arearum circa ſolem deſcriptarum, vires hæ ad Solem tendunt. Et ob Tempora Periodica in ratione diſtantiarum ubique ſeſquialtera, Virium Quantitas eſt ubique in duplicata diſtantiarum à Sole ratione reciproca; uti olim demonſtravimus. Pars etiam ſecunda hujus Propoſitionis accuratiſſime demonſtratur per figuram orbium. Si enim Planetæ moverentur circa Solem in Spiralibus radios in dato angulo ſecantibus, vires centripetæ eſſent in diſtantiarum ratione triplicata, vel ut Cubi diſtantiarum reciproce. Si autem moverentur in Ellipſibus centra ſua in Solis centro habentibus, Vires centripetæ eſſent in ipſa diſtantiarum ratione directa. Cum autem moveantur omnes in Ellipſibus Umbilicos ſuos in Solis centro habentibus, uti apud Aſtronomos in confeſſo eſt, vires centripetæ erunt in ratione diſtantiarum duplicata reciproca.

Quod etiam certiſſime demonſtratur per Apheliorum quietem. Ubi enim ratio hæc reciproca duplicata accurate obtinet, quieſcunt Aphelia: ubi ratio ad triplicatam vergit, Progrediuntur: ubi ad ſimplicem rationem accedit, Regrediuntur. Quies itaque Apheliorum in Planetis Primariis indicio eſt vim centripetam eſſe accurate in ratione diſtantiarum duplicata reciproca.

LXXVII. Vires quibus Planetæ Circumjoviales & Circumſaturnii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpiciunt centrum Jovis & centrum Saturni reſpective; & ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab iiſdem centris.

Ob æquabilitatem arearum circa centra Jovis & Saturni reſpective deſcriptarum, vires hæ ad centra Jovis & Saturni tendunt. Et ob Tempora Periodica in ratione diſtantiarum à centris Jovis & Saturni ſeſquialtera, virium quantitas eſt ubique in ratione diſtantiarum ab iſtis centris duplicata reciproca. Cum autem Satellites Circumjoviales & Circumſaturnii in circulis aut ellipſibus à circulis haud ſatis ſenſibiliter diverſis moveantur, nihil ex orbium figura inferri poteſt. Nec proinde ex

Aphelio-

Apheliorum quiete. In circulis enim Apſidum line eſt nulla; atque proinde nihil de ejuſdem quiete au motu affirmari poteſt.

LXXVIII. Vires quibus Luna perpetuo retrahitur motu rectilineo, & in orbe ſuo retinetur, reſpiciunt Centrum Terræ; & ſunt reciproce ut quadratum diſtanti locorum ab ipſius centro.

Ob æquabilitatem areæ circa centrum Terræ ubiqu deſcriptæ, niſi quatenus aliquantulum per vim Solis perturbatricem mutatur; vires hæ ad centrum Terræ tendunt. Et ob figuram Orbis Lunaris Ellipticam circ Telluris centrum in Ellipſeωs Umbilico poſitum, viriu Quantitas eſt ubique in ratione diſtantiarum ab iſto centro duplicata reciproca. Quanquam enim figura hæ Lunaris orbitæ non ſit prorſus Elliptica, neque proind motus fiat circa centrum Telluris in Ellipſeωs Umbilic accurate poſitum; cum tamen omnis hæc varietas ali unde accedat, & à vi Solis perturbatrice ſolummod oriatur, Figura per ſe eſſe Ellipſis, & Terra in ejus Umbilico primario collocari eſt intelligenda: & proinde vir propriæ centripetæ ſunt in ratione duplicata diſtantiaru à centro Telluris reciproca. Cum autem unicus hic Sa telles Terram ambiat, Tempora periodica inter ſe co ferenda nullum hic locum habent. Attamen Motus Lunaris Apogæi tardiſſimus indicio eſt vires centripetas ratione reciproca duplicata parum admodum diſcrepar. Patet enim per Newtoni calculum ex tardo Apogæi progreſſu, quod vis centripeta Lunæ verſus Terram vicibu pluſquam ſexaginta propius ad rationem hanc duplicatam quam ad triplicatam accedat. Oritur autem tota hæ differentiola ab actione Solis perturbatrice, uti olim expoſuimus: & propterea hic negligenda eſt. Reſtat igitur ut vis illa quæ ad Terram ſpectat ſit reciproce quadratum diſtantiæ à centro Terræ: Id quod etia plenius conſtabit conferendo hanc vim Lunæ centripetam cum vi gravitatis in ſuperficie Telluris; ut fiet ſequente Propoſitione.

LXXI

LXXIX. Luna Gravitat perpetuo in Terram; & vi gravitatis retrahitur semper à motu rectilineo, & in orbita sua retinetur.

Ex calculo enim virium centripetarum Lunam in orbita sua perpetuo retinentium, cum vi gravitatis per experimenta pendulorum accuratissime instituta apud nos cognita & collata, constat vires hasce ejusdem omnino esse quantitatis, & versus idem Terræ centrum tendentes, uti olim ostendimus. Et propterea, vis qua Luna in orbita sua retinetur illa ipsa est quam nos *Gravitatem* dicere solemus. Nam si gravitas ab ea diversa sit, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent non pedes 16⌊1, ut experientia constat; sed 32⌊2. omnino contra experentiam. Vis itaque centripeta qua Luna in orbita sua perpetuo retinetur, ea ipsa vis est quam nos gravitatem dicimus, & qua omnia corpora in superficie Terræ ab eadem separata versus eam cadunt; in duplicata nimirum distantiæ ratione reciproca; & ea velocitate qua 16⌊1 pedes Anglicos tempore minuti unius secundi cadendo describunt.

LXXX. Planetæ Circumjoviales gravitant in Jovem, & Circumsaturnii in Saturnum, & circumsolares in Solem; & vi gravitatis suæ retrahuntur semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retinentur. Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, & Circumsaturniorum circa Saturnum, & Circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea à causis ejusdem generis dependere debent. Præsertim cum demonstratum sit quod vires à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis, Saturni, ac Solis; & recedendo à Jove, Saturno, & Sole decrescant eadem ratione ac lege qua vis gravitatis decrescit in recessu à Terra.

Coroll. (1.) Igitur Gravitas datur in Planetas universos. Nam Venerem, Mercurium, cæterosque Planetas esse corpora ejusdem generis cum Jove & Saturno

nemo

nemo dubitat. Certe Planeta quivis Circumſatur
gravis eſt in Saturnum, & Circumjovialis in Jovem:
cum attractio omnis, per Motus Legem 5. mutua ſi
Saturnus viciſſim gravitabit in Satellites ſuos; & Ju
ter in ſuos; Terraque in Lunam; & Sol in Planetas o
nes, tum Primarios, tum Secundarios gravitabit.

Coroll. (2.) Gravitas quæ Planetam unumquemque r
ſpicit, eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum
ipſius centro.

LXXXI. Corpora omnia in Planetas ſingulos gra
tant: & Pondera eorum in eundem quemvis Planeta
paribus diſtantiis à centro Planetæ, Proportionalia ſu
quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram, dempta ſa
tem inæquali retardatione quæ ex aeris reſiſtentia oritu
æqualibus temporibus fieri jamdudum fuit obſervatum,
nos prius obſervavimus, ſive corpora deſcendentia mag
ſint, ſive parva; ſive liquida ſint, ſive dura; ſive ſoli
ſint, ſive fluida. Quod quidem ad amuſſim congru
tum experimentis corporum directe deſcendentium, cu
præcipue pendulorum in arcubus ſive circularibus ſi
cycloidalibus oblique deſcendentium. Hæc enim o
nia ad eandem centri oſcillationis à centro ſuſpenſio
diſtantiam per arcus æquales demiſſa æqualia pror
temporis ſpatia in deſcenſu & aſcenſu impendunt,
eunt ſimul redeuntque diutiſſime. Proinde, cum o
liquitas motus curvilinearis ſit in hoc caſu ubiq
ſimilis & æqualis, eadem corpora ſimul dimiſſa in ſ
tio vacuo paribus temporibus paria omnino ſpatia in
ſcenſu vel aſcenſu perpendiculari impendunt: & proi
pondere materiæ quantitati ubique ad amuſſim prop
tionali impelluntur. Ubi enim materiæ quantitas du
vel tripla, vi etiam in univerſum dupla vel tripla ur
tur, nec aliter, velocitas motus erit ſemper æquali
hoc eſt, ubi quælibet cujuſque corporis particula æq
lis æquali gravitatis vi urgetur, ſumma omnium ſive
magno corpore, ſive in parvo proportionali gravita

i urgebitur; & omnes particulæ mutuos conatus neque ccelerantes neque retardantes pari semper velocitate descendent, & æquali vi in terram gravitabunt. Quod ero experimenta corporum pendulorum sic se habeant, rius ostendimus: & rem sigillatim tentavit Newtonus n auro, argento, plumbo, vitro, arena, sale communi, gno, aqua, & tritico e. g. Duarum Pixidum lignearum rotundarum & æqualium unam implevit ligno; & dem auri pondus suspendit quam potuit exacte in alterius centro oscillationis. Pixides ab æqualibus pedum ndecim filis pendentes constituebant pendula quoad ondus, figuram, & aeris resistentiam omnino paria. Et aribus oscillationibus juxta positæ ibant una & redibant diutissime. Et in corporibus ejusdem ponderis, differentia quantitatis materiæ, quæ vel minor esset quam ars millesima materiæ totius, his experimentis manifesto eprehendi potuit. Jam vero Naturam gravitatis in Planetas reliquos & Solem ipsum eandem esse atque in Terram nullus est satis sonticus dubitandi locus. Quod tiam ex figura omnium sphærica, per mutuum partium mnium ad se mutuo gravitantium æquipondium nec liunde facile deducenda, liquere potest. Porro, Elevari fingantur corpora hæc terrestria ad usque orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, t in terram simul cadant: Per nuper Ostensa certum st quod temporibus æqualibus describent æqualia spatia tque Luna ipsa describeret; adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua, ad ipsius ondus. Præterea, quoniam Satellites Jovis, & Saturni temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquialtera distantiarum à Centris Jovis & Saturni, erunt orum gravitates acceleratrices in Jovem & Saturnum eciproce ut quadrata distantiarum ab istis centris: & ropterea æqualibus à Jove & Saturno distantiis omnibus, eorum gravitates acceleratrices evadent æquales; & corpora omnia æque afficient. Atque proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo de-

scriberent

fcriberent æqualia fpatia, perinde ut fit in gravibus in hac terra noftra. Et eodem argumento Planetæ Circumfolares ab æqualibus à Sole diftantiis dimiffi, defcenfu fuo in Solem æqualibus temporibus æqualia fpatia defcriberent. Porro Jovis & Saturni & eorundem Satellitum pondera in Solem proportionalia effe quantitati materiæ earum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari, & orbitis Jovi & Saturno fere concentricis. Nam fi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ fuæ, quam cæteri, motus Satellitum ex inæqualitate attractionis perturbarentur; & in tantum quidem perturbarentur ut fi, æqualibus à Sole diftantiis, gravitas acceleratrix Satellitis alicujus Jovialis, verbi gratia in Solem major effet vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem parte tantum millefima totius gravitatis, ex ipfius Newtoni calculo foret diftantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam diftantia Jovis à Sole parte bis-millefima diftantiæ totius; in fubduplicata nimirum diftantiæ ratione; id eft, parte quinta diftantiæ Satellitis extimi à centro Jovis. Quæ quidem orbis eccentricitas foret valde fenfibilis. Sed Orbes Satellitum Jovis funt Jovi concentrici; & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter fe. Et eodem argumento pondera Saturni & Satellitum ejus in Solem, æqualibus à Sole diftantiis, funt ut quantitates materiæ in ipfis. Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem pariter funt earum maffæ accurate proportionalia. Eodem modo res fefe habet quoad pondera partium fingularum Planetæ cujufque in alium quemque; five partes fint internæ, five externæ: Nam fi partes aliquæ plus, aliæ minus gravitarent quam pro quantitate materiæ totius, Planeta totus vel Satelles pro genere partium quibus maxime abundaret, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius; omnino contra experientiam. [Sed hæc hactenus. Corollaria enim hujus

hujus Propositionis utilissima Prælectioni proximæ reservabimus.]

Novemb. 24°. 1707.

XXXIV.

Coroll. (1.) HINC Pondera corporum minime pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari & mutari possent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia; omnino contra experientiam.

In Scholis recens reparatis.

Coroll. (2.) Igitur corpora universa quæ circa terram sunt, sive ligna, sive metalla, sive lapides, sive aqua, sive aer, sive vapores, gravia sunt in terram; & pro ratione materiæ æqualiter gravia. Si Cortex, vel Lana, vel Aer, pondo unius libræ in vacuo æquivaleat, & Aurum, vel Argentum vivum, vel Æs eidem pondo ibidem æquivaleat, Quantitas materiæ erit in omnibus omnino æqualis.

Coroll. (3.) Pondus itaque corporum quorumcunque in vacuo est certissimus quantitatis materiæ Index. In corporibus enim mole æqualibus tanta esse solet densitatis diversitas, ut ex apparente corporis magnitudine nullo modo de materiæ in eodem contentæ quantitate statui possit. Cum vero illa ponderi sit ubique proportionalis, ex eodem pondere certissime determinari potest.

Coroll. (4.) Itaque Vacuum necessario datur. Nam si spatia omnia Plena essent, gravitas specifica fluidi quo Regio aeris impleretur, imo & vacui cujusvis quod vocamus Boyleanum ob densitatem materiæ omnino summam & perfectissimam, sive potius infinitam, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi. Et propterea nec aurum ipsum

cor-

corporum omnium ſpecifice graviſſimum, in aere deſcendere poſſet: omnino contra experientiam. Ut omittam argumenta omnem omnino motum in ſpatio pleno tollentia; quæ quidem ſatis per ſe ſolida videntur.

Coroll. (5.) Cum ex pondere æque ac reſiſtentia quantitas materiæ ubique innoteſcat; & cum ex pondere liqueat corpora pleraque omnia apud terram multo plus ſpatii vacui quam materiæ ſolidæ in ſe continere; cum etiam ex minima & plane imperceptibili Planetarum Cometarumque reſiſtentia liqueat ſpatia cœleſtia ſive ætherea omni quaſi materia eſſe vacua; quin & Planetas & Cometas ipſos, imo & Solem Stellaſque fixas, quaſi nihili puncta, inſtar ætheris vacui quaſi evaneſcere; Palam eſt rerum naturam adeo non *à Vacuo abhorrere*, quod ſomniarunt haud pauci, præſertim Carteſiani, ut ea potius parum in ſe præter Vacuum contineat. Tantillum poteſt ingenium humanum in Operibus Dei inveſtigandis, ubi Experimenta deſunt, & ratiocinia Mathematica! Vix enim, ut opinor, Sagaciſſima Carteſii ipſius mens, hiſce fundamentis deſtituta, vel ſemel veras rerum cauſas Phyſicas, & inventis nuperis congruas excogitare potuit.

Coroll. (6.) Gravitatis vis eſt generis diverſi à vi magnetica. Attractio enim magnetica non eſt ut materia attracta; cum corpora aliqua magis, alia minus, plurima non omnino attrahantur. Eſtque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, cum magnes perexiguus ipſam totius telluris vim attrahentem exuperare poſſit, & clavem ferream ſuſtollere. Sed & vis magnetica in eodem corpore intendi & remitti poteſt; in receſſu vero à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ pluſquam duplicata, quæ tamen eſt ratio gravitatis perpetua, propterea quod vis longe fortior ſit in ſuperficierum contactu quam cum attrahentia vel minimum ab invicem ſeparantur.

LXXXII. Vis gravitatis corpora univerſa, Syſtema ſaltem Solare occupantia, ſpectat; & proportionalis eſt quan-

quantitati materiæ in ſingulis. Planetas omnes in ſe mu-
uo graves eſſe; & gravitatem in unumquemque ſeor-
ſim ſpectatum eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ lo-
orum à centro Planetæ jamjam probavimus. Si quid
lubii oriri poſſet illud certe eſſet de gravitate unius
Primarii Planetæ in alium: nam de communi omnium
d centralia ſua corpora gravitate res per demonſtrata
riora planior eſt quam ut ullo modo poſſit labefactari.
Quin & non deeſt indicium apertum gravitatis etiam
lanetas diverſos ſpectantis. Cum enim ante aliquot
nnos Saturnus circa conjunctionem cum Jove diu hæ-
ſſet, & proinde ob corporis magnitudinem & viciniam
on potuit non ſenſibiles aliquos effectus in Jovis Satel-
ibus perturbandis edere, ſi modo Jupiter cum ſuis Sa-
llitibus ad Saturnum pro univerſa hac attractionis mu-
æ lege gravitaret, res ipſa revera ita ſe habuiſſe eſt
mperta. Ipſe enim Cl. Flamſtedius qui primitus ta-
ullam in motibus Satellitum Jovis perturbationem
nueret, re melius perpenſa, & obſervationibus cum
culo accuratius collatis ingenue faſſus eſt iſtam uni-
ſalem gravitatis legem etiam hoc caſu valuiſſe; mo-
ſque iſtos, prout fieri debuit, perturbatos à Saturni
inia, & calculis prioribus minus congruos reapſe ap-
uiſſe. Conſequens itaque eſt per Prop. 81. ejuſque
rollaria gravitatem dari in omnes Planetas, & eam
portionalem eſſe materiæ in iiſdem contentæ.

Porro, cum Planetæ cujuſvis, puta Mercurii, partes
nes graves ſint in Planetam quemvis alium, puta Ve-
em; & gravitas particulæ cujuſque, ſit ad gravitatem
ius, ut materia partis, ad materiam totius; & acti-
omnis reactio (per motus Legem 5.) æqualis ſit,
us in partes omnes Mercurii viciſſim gravitabit; &
Gravitas Veneris in partem unamquamque, ad gra-
em ſuam in totum, ut materia partis, ad materiam
us.

orollarium. Oritur igitur & componitur gravitas
anetam quemvis totum ex gravitate in partes ſingu-

 las

las; uti fit in attractionibus Magneticis, & Electricis; ubi quo majus est attrahens, eo cæteris paribus major est attractio. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas; nec aliter res rite concipi potest. Hoc facilius intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores, omnia corpora seorsim attrahentes, in unum globum coire, & majorem Planetam componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri omnino debet. Si quis objiciat Quod corpora omnia quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo; cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur; Responsio facilis est; quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in terram totam, pari distantia, ut sunt hæc corpora, ad Terram totam, longe minor est, quam ut ullo indicio sensibili dignosci possit.

Coroll. (2.) Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à particulis.

LXXXIII. Si Globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique in regionibus quæ à centris æqualiter distant homogenea sit, erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenisset Cl. Newtonus gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes, & esse in partes singulas reciproce proportionales quadratis distantiarum à partibus, dubitabat, an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in tota ex partibus pluribus composita; an vero quam proxime. Nam fieri potuit ut proportio illa in majoribus distantiis satis obtineret; at prope superficiem Planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles notabiliter erraret. Tandem vero per Prop. & 45. & ipsarum Corollaria eandem proportionem in sphæricis corporibus, ad eandem ubique à centris distantiam æque densis, accurate obtinere intellexit.

LXXX

LXXXIV. *Problema.* Pondera corporum in diver-
s Planetas vel in Solem, ad datas diſtantias ab iſtorum
ntris definire.

Casus (1.) Pondera corporum extra Planetarum
perficiem ad diſtantias æquales definire. Nimirum
um pondera ad diſtantias æquales ſint ut quantitates
ateriæ in Planetis verſus quos fit gravitatio, & cum
ud pondus vel materiæ quantitas ex ejus attractionis
antitate, tanquam cauſa ab effectu, unice dignoſci
ſſit; cum demum iſta attractionis quantitas ſit pro-
rtionalis velocitatum in æqualibus hiſce circulis qua-
atis directe, vel temporum periodicorum quadratis
ciproce; ex velocitatum quadratis Rationes Ponde-
n facillime innoteſcent. Ex Temporibus itaque pe-
dicis Planetarum alios circa ſe revolventes habentium
us exhibitis hujuſmodi orietur ratio ponderum in
lem, Jovem, Saturnum, ac Terram reſpective:

Pondus in	*Solem*	——	229600
	Jovem	——	208⌊72
	Saturnum	——	97⌊328
	Terram	——	1
	Et *in Lunam*	—	$0\frac{1}{26}$.

idem autem numeri qui *ponderis* rationem etiam &
titatis *materiæ* rationem oſtendunt Hac autem a-
gia tempora periodica diſtantiis realibus congrua ad
odica tempora diſtantiæ datæ cuilibet congrua facile
centur: nimirum ut Diſtantiæ realis Cubus, ſe ha-
d diſtantiæ datæ Cubum, ita Temporis realis pe-
ici Quadratum, ad quartum numerum, ſive ad
poris Periodici quæſiti Quadratum. Hujuſce igi-
numeri radix quadratica dabit Tempus ipſum Pe-
cum quæſitum. Et hoc pacto rationes ponderum
ateriæ in Sole, Jove, Saturno, & Terra obtine-
Luna autem, cum nullum Satellitem circum ſe
t, & proinde hujuſmodi indicium nullum ponderis

in se aut materiæ contentæ exhibeat, in æstu autem ma-rino aliud indicium olim exponendum exhibeat, Ind-nos eandem mutuo acceptam hic loci reliquis adscriben-dam duximus.

CAS. (2.) Pondera Corporum ad semidiametrorum Planetariarum distantias, sive in Planetarum superficie-bus definire. Eadem nempe methodo ac in priori casu, & simili prorsus analogia ad particulares hasce di-stantias accommodata. Quo calculo, si semidiametros Planetarum juxta Flamstedium determinatas pro veris habeamus, sic se res habebit,

Sol		763460	
Saturnus		67870	
Jupiter		81155	
Mars	*Patet secundum*	4444	*Milliar[ia]*
Tellus	*diametrum.*	7935	*Anglica*
Luna		2175	
Venus		7906	
Mercurius		4240	

Pondus ergo corporum æqualium in Planetarum superficiebus sic se habet.

In	*Solem*	24
	Terram	1
	Jovem	1L99
	Lunam	L515
	Saturnum	1L7

Atque hæc impræsentiarum sufficiant. Reliqua enim in Prælectionem proximam differentur.

April 26. 1708.

XXXV.

LXXXV. PROBLEMA. Denſitates Planetarum definire. Nimirum cum quantitatem ma- eriæ in Planetis quinque in caſu priore ultimæ Propo- ſitionis determinatam habeamus; & cum Diametros om- ium Planetarum ſecundum Flamſtedium in caſu ſe- undo etiam habeamus determinatam; Exinde facile fue- it è data materiæ quantitate in datis ſphæris contenta jusdem materiæ denſitatem calculo determinare: quam aque Tabella appoſita exhibebit.

Denſitas	*Lunæ* ——	7⌊00
	Terræ ——	3⌊87
	Solis ——	1⌊00
	Jovis ——	⌊76
	Saturni ——	⌊60

LXXXVI. Gravitas pergendo à ſuperficiebus Plane- rum deorſum decreſcit in ſimplici ratione diſtantiarum centris quam proxime.

Si enim Planetæ materia quoad denſitatem uniformis ſet, obtineret hæc ratio accurate; per Prop. 47. Error itur tantus eſt, quantus ab inæquali denſitate oriri poſſit.

Corollarium. Gravitas itaque corporum in ipſis Pla- tarum ſuperficiebus eſt omnium maxima, & utrinque creſcit; eſtque ſurſum in duplicata reciproca diſtantiæ tione, deorſum vero in ſimplici ratione directa.

LXXXVII. Motus Planetarum & Cometarum in lis diutiſſime conſervari poſſunt.

Cum enim Mediorum reſiſtentia, quæ ſola motus ſce ſemel inceptos retardare & ſiſtere poſſet, minu- r in ratione ponderis ſive materiæ denſitatis; ſic ut ua, quæ vicibus fere quatuordecim levior eſt quam gentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione; & , qui vicibus fere mille levior eſt quam aqua, minus re-

ſiſtat in eadem ratione; Si ultra Atmoſphæram noſtram, ipſam quoque quaſi in infinitum gradatim rareſcentem, in cœlos, ubi pondus vel denſitas medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſpiciamus, reſiſtentia tantilla erit ut per millennia aliquot vix evadat ſenſibilis: uti revera fuiſſe inſenſibilem motus cœleſtes à primis Aſtronomiæ incunabulis ſine notabili mutatione aut jactura hucuſque perſiſtentes evincunt.

Corollarium. Cum vero in tempore infinito perexigua iſta Reſiſtentia, ſi qua ſit, omnes iſtos motus debuerit retardare, penituſque ſiſtere, palam eſt ex iſta hypotheſi hodiernum cœlorum ſtatum nec à parte ante fuiſſe, nec à parte poſt futurum æternum. Præſertim autem hoc omnino valebit alio nomine, ſi nempe vim gravitatis in tota rerum Univerſitate, & non tantum in Syſtemate Solari obtinere, cum Newtono, ſtatuamus. Si enim Fixæ ſtellæ, ſive Soles, cum Planetis ſuis Cometiſque qualicunque exiſtunt numero, modo non ſit infinitus, Gravitatis vi ſubjecti fuerint, longo demum tempore vis iſta ea omnia una contraxiſſet, & in Univerſi gravitatis centro communi congeſta quieſcere juſſiſſet. Quod etiam tempore infinito futuro ex eodem hypotheſi, ſine Divinæ Providentiæ interpoſitu, neceſſario eſt eventurum. Ut itaque Præſens rerum ſtatus tempore certo cœpit, à Dei O. M. nutu & potentia inchoatus; ita tandem aliquando fieri poteſt ut finem ſortiatur: cum ſcilicet Beneplacito Divino id viſum fuerit: ſine cujus etiam perenni actione, unde Vis hæc miranda gravitatis dependet tota, ne minimum temporis ſpatiolum perdurare poteſt.

LXXXVIII. Commune centrum gravitatis Terræ, Solis, & Planetarum omnium aut quieſcit, aut movetur uniformiter in linea recta. Hoc ex prius demonſtratis liquet. Neque ſane ullo certo indicio apparet utrum quieſcat an moveatur. Hoc tantum ſtatuere licet, Quod ſi moveatur centrum illud, & cum eo Solare Syſtema ut moveatur eſt neceſſe. Stellæ enim

fixæ

fixæ nos undique cingentes nec majores ex ulla parte nec minores nobis hodie apparent quam antiquis Astronomis ante annos bis mille apparuisse narrantur. Quod quidem phænomenon aut centri gravitatis quietem, aut saltem motum tardiusculum monstrare videtur.

Coroll. (1.) Hinc commune centrum gravitatis Solis & Planetarum omnium pro centro Systematis Solaris sive Mundi Planetarii habendum est. Nam cum Sol & Planetæ omnes graviteht in se mutuo, & propterea pro vi gravitatis suæ secundum leges motus prius expositas perpetuo agitentur; Perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in Centro locandum sit in quod corpora omnia maxime gravitant, & quod centro immobili est proximum, uti rationi est maxime consentaneum, privilegium illud concedendum est Corpori Solari; quod itaque physice loquendo *Centrum Mundi Planetarii* jure merito est habendum. Sin accurate & mathematice loqui velimus, cum Sol ipse moveatur, & nullum corpus sensibile quiescat in centro, Eligendum erit Centrum Gravitatis totius Systematis pro Mundi nostri Centro: quod quidem Centrum revera quiescere videtur: & à quo Centrum Solis quam minime discedit. Physice itaque Sol ipse, Mathematice autem Centrum istud Gravitatis est Mundi nostri Centrum.

Coroll. (2.) Nulla ergo datur perfecta quies in natura rerum. Quiescat enim commune Systematis Centrum; at *solum* certe quiescit: omnibus Systematis partibus perpetuo motis. Et cum centrum gravitatis sit non corpus physicum, sive reale, sed punctum mathematicum, sive plane nihil, ex hoc ratiocinio sequitur omnino nihil reale quiescere; sive nullam dari in Systemate Solari corporum realem & perfectam Quietem.

LXXXIX. Corpus Solare nunquam quiescit; sed motu perpetuo agitatur. Nunquam vero longe recedit à communi omnium Planetarum Gravitatis centro,

Nam cum quantitas materiæ in Sole, ſit ad quantitatem materiæ in Jove, ut 229.600 ad 208L72. ſive ut 1100 ad 1. & diſtantia Jovis à Sole, ſit ad ſemidiametrum Solis, ut 424.000.000, ad 381.730. ſive ut 1100 ad 1, hoc eſt, in eadem ratione circiter; Commune centrum gravitatis Jovis & Solis, ad diſtantiam corporibus ipſis reciproce proportionalem poſitum, incidet fere in ſuperficiem Solis. Eodem argumento cum quantitas materiæ in Sole, ſit ad quantitatem materiæ in Saturno, ut 229.600 ad 97L328. ſive ut 2360 ad 1. & diſtantia Saturni à Sole, ſit ad ſemidiametrum Solis ut 777.000.000 ad 381.730. ſive in ratione paulo minori; incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Unde Commune centrum gravitatis Jovis & Saturni ex parte una, & Solis ex altera parte poſitorum integra Solis Diametro à centro Solis minime diſtabit. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, propter reliquorum parvitatem & viciniam, Commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis Diametro à centro Solis diſtaret. Aliis vero in caſibus, quod plerumque fit, diſtantia centrorum minor erit: & ubi Planetæ hinc inde poſiti ſibi mutuo æquiponderent, plane nulla. Propterea, licet centrum illud gravitatis revera quieſcere ſupponatur, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes aliquantulum movebitur; ſed à communi illo gravitatis centro nunquam longe recedet.

XC. Planetæ omnes Primarii moventur in Ellipſibus, Umbilicum communem in Centro Solis habentibus; & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. Quæ etiam Propoſitio vera eſt in Secundariis circa Primariorum ſuorum centra revolventibus.

Hæc quidem ſupra ex Phænomenis Aſtronomicis deduximus. Jam vero cognitis & ſtabilitis motuum horum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori.

Ex

Ex gravitatis enim directione versus centra Solis & Planetarum Primariorum, arearum descriptarum æquabilitas; & ex gravitatis lege versus ista centra, nempe in distantiæ ratione reciproca duplicata, figura ista Orbium Elliptica circa Centra ista in Umbilicis posita necessario sequitur; uti olim è Newtono demonstravimus. Et hæc quidem se haberent accurate, si Sol & Planetæ Primarii quiescerent, neque se in mutuo agerent. Forent enim orbes eorum ad rigorem Geometricum Elliptici, Solem Planetasque Primarios in Umbilicis habentes; atque areæ descriptæ essent accurate æquabiles, sive temporibus proportionales. Actiones autem Solis & Planetarum in se mutuo perexiguæ sunt, ut merito contemni possint. Et motus Planetarum in Ellipsibus circa Solem & Primarios mobiles quam si immobiles essent minus perturbantur, uti olim observavimus. Unde physice loquendo, Propositio etiamnum Vera est censenda. Actio quidem Jovis in Saturnum ejusque 5. Satellites; & Saturni in Jovem ejusque 4. Satellites non est omnino contemnenda. Cum hi planetæ ingentes sint, & ad maximam à Sole distantiam positi. Unde attractionibus suis mutuis circa conjunctiones suas heliocentricas, ob motuum tarditatem haud parvo etiam tempore durantes, inæqualites nonnullæ tam in orbitarum figuris quam in motibus utrinque orientur: vix tamen in ipsis Planetarum horum Primariorum, adeo ac in Satellitum, præsertim Jovialium motibus inæqualibus dignoscendæ.

Scholium. Ex Cl. Newtoni calculo vis perturbatrix sive Gravitas Saturni in Jovem, est ad Gravitatem Saturni in Solem, circa Planetarum istorum conjunctionem, ut 1 ad 217 circiter. Et Gravitatum Solis in Saturnum, & Jovis in Saturnum differentia, est ad gravitatem Jovis in Solem, ut 1 ad 1867. Cui quidem differentiæ proportionalis est vis maxima perturbatrix Saturni in Jovem. Unde perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturnii. Reliquorum autem

Orbium

Orbium perturbationes ex calculo adeo exiguæ deprehendentur, ut omnino debeant contemni.

XCI. Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Propter vim gravitatis in distantiæ ratione duplicata reciproca, Apsides & Aphelia per se quiescere debent; uti prius monitum. Et propter vim eandem, punctum fere immobile semper respicientem, Orbium plana etiam debent quiescere; & quiescentibus planis ut Nodi sive planorum intersectiones quiescant est necesse. Notandum tamen inæqualitates nonnullas à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem labentibus seculis orituras; tantillas tamen, ut ob parvitatem plerumque contemni possint. Notandum etiam nos hic loci Centri Gravitatis systematis totius quietem, cum Astronomis omnino omnibus, supponere; etsi quietem istam, uti prius monuimus, nondum *demonstrare* licuerit. His autem positis sequentia Corollaria deducemus.

Coroll. (1.) Quiescunt stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque quiescentes positiones servant. Novum certe hoc ratiocinii Astronomici genus! ut ex Planetarum erraticorum systemate Inerrantium quies inferatur: cum è contra ex fixarum quiete supposita Planetarum motus determinare hactenus soliti fuerimus. Ignoratis nimirum ante Cl. Newtonum veris motuum cœlestium causis hujusmodi Corollaria nobilissima ut ignorarentur erat omnino necessum.

Coroll. (2.) Cum fixarum parallaxis, etiam annua, tantilla sit, ut vix Observatoribus accuratissimis se tandem prodat, vires earum, ob immensam corporum distantiam, nullos effectus sortientur sensibiles in regione systematis nostri.

Coroll. (3.) Unde sequitur *Astrologiam Judiciariam*, quam vocant, non solum Planetarum sed & Fixarum posituris & influentiis innixam, omni certo fundamento carere: cum vires maximas eorum corporum supponat quas minimas plane, sive potius omnino nullas

esse

esse superiori Corollario sit recte observatum. Quin & hoc etiam addere liceat, vires Planetarum præter Solem & Lunam reliquorum, quas tantopere crepant Astrologi, aut ob distantias enormes, aut ob corporum parvitatem tantillas esse in Atmosphæra nostra, & apud Tellurem, ut vix aut ne vix quidem ullo indicio *sentiri* possint; nedum ut effectus istos, magnos certe & admirandos, quos supponunt, ullo pacto producere queant. Qui Idololatrarum more Stellas Deos esse, vel Deos iis inesse Immortales opinantur, habent, quo patrocinentur hypothesi suæ. Qui vero tam crasso errori olim valedixerunt, mirum quo fato istis næniis, omni sana ratione cassis, tam pertinaci animo etiamnum adhæreant.

Maii 17°. 1708.

XXXVI.

XCII. PLANETARUM motus diurni uniformes sunt & æquabiles: & Librationes Lunæ, ex ipsius motu diurno æquabili, cum menstruo inæquabili collata, & secundum axem ad orbitam inclinatam peracto necessario oriuntur.

Hæc olim annotavimus; nec multis verbis hic opus. Quoniam vero Lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est; (periodicum mensem hic volumus:) Hujus facies eadem *superiorem* fere Ellipseos Umbilicum, non vero Tellurem in *inferiori* positam semper respiciet; eo quod motus angularis quoque circa istum Umbilicum fere sit æquabilis, inæquabilis vero circa Tellurem. Et propterea pro situ Umbilici superioris deviabit plerumque hinc inde à Terra, & partes nunc orientaliores nunc occidentaliores nobis exhibebit:

bit: quæ eſt *Libratio Lunæ in Longitudinem*. *Libratio* autem *in Latitudinem*, qua partes nunc borealiores nunc auſtraliores nobis oſtenduntur, oriri debet ex inclinatione axis Lunaris ad planum ſuæ orbitæ; uti rem attentius conſideranti erit apertiſſimum.

Corollarium. Hic loci annotare placet quam accurate inter ſe conſentiant motus hi duo Lunares, neutiquam à ſe invicem dependentes; diurnus nempe & menſtruus: ita ut alter alterum ne minimum quidem antevertere, per bis mille ſaltem annos, ſit deprehenſus. *Non hoc* certe *ſine numine Divûm*, uti alias annotavimus.

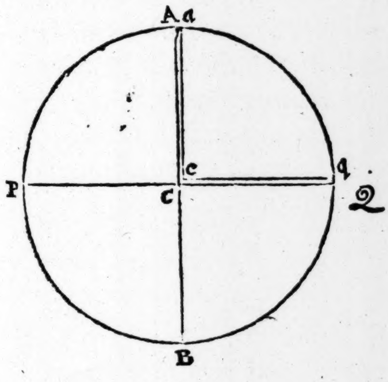
XCIII. Axes Solis & Planetarum motu diurno gaudentium Diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores ſunt. Sive Figura Solis & Planetarum in ſe motu diurno revolventium ea eſt ſphæroidis oblatæ; hoc eſt, ſolidi revolutione Ellipſeos circa axem minorem geniti.

Planetæ & corpora quævis cœleſtia ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare & induere deberent. Per motum autem circularem diurnum fiet, ut partes ab axe motus neceſſario recedentes, & gravitati detrahentes juxta æquatorem, ubi motus eſt celerrimus, aſcendere conentur. Ideoque eo loci materia Planetæ, niſi admodum ſit ſolida, aſcenſu ſuo ad æquatorem ejuſdem diametros adaugebit; axem vero deſcenſu ſuo, gravitate partium ibi nihil diminuta, ad polos diminuet. Sic Jovis Diameter (conſentientibus obſervationibus Caſſini & Flamſtedii) brevior deprehenditur intèr Polos quam ab oriente in occidentem. Eodem Argumento Terra noſtra axem ſuum Æquatoris diametris minorem habere debuit. Niſi enim ita ſe res haberet, & terra noſtra paulo eſſet altior ſub æquatore quam ad polos, maria, ob gravitatem majorem circa polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo omnia inundarent. Ob majorem vero motus diurni velocitatem & denſitatem minorem, Jupiter differentiam diametrorum multo ma-

gis

gis ſenſibilem quam reliquorum Planetarum quivis, vel Sol ipſe exhibere debet. Unde Obſervatores Aſtronomici in hoc ſolo Planeta hanc differentiam hactenus deprehendere potuerunt. Tellurem autem noſtram eandem figuram olim induiſſe patet, non tantum indicio nuperrime expoſito, ſed & per pendulorum experimenta accuratiſſime inſtituta. Quo enim horologia Oſcillatoria eadem penduli longitudine gaudentia Æquatori proprius admoventur, oſcillationes paulo tardiores, quo ad Polos propius accedunt paulo velociores obſervantur; eo nimirum quod in caſu priori centrum Telluris propius, in poſteriori remotius retardationem & accelerationem corporum pendulorum reſpective procuret, uti ex præſenti Propoſitione fieri erat neceſſe.

Scholium. Si Proportionem Axis Planetæ cujuſvis ad Æquatoris Diametros accurate reſcire cupiatis, Multiplices Calculi Newtoniani ambages obire oportebit. Sin calculi hujuſce fructum ſine calculi tædio percipere placeat, ſic accipitote. Inito nimirũ calculo invenit Newtonus quod vis centrifuga partium terræ ſub æquatore, ex motu diurno oriunda, ſit ad vim gravitatis in terræ ſuperficie ut 1 ad $290\frac{4}{5}$. Unde ſi *APBQ* figurã Terræ deſignet revolutione ellipſeωs circa axem minorẽ *PQ* genitam; ſitque *ACQ qca* canalis aquæ plena à Polo *Qq* ad centrum *Cc* & inde ad æquatorem *Aa* pergens, debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, eſſe ad pondus aquæ in crure altero *QCcq*, ut 291, ad 290 fere. Eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 ſuſtinebit & detrahet; & pondus 290 in



altero

altero crure ſuſtinebit partes reliquas. Res enim vera eſt non tantum in ſuperficie Telluris, ſed in omnibus utriuſque cruris partibus, propter vim centrifugam & gravitatem partium inferiorum ſecundum diſtantias à centro proportionales ubique acceptas, eadem ſemper ratione in progreſſu ad centrum diminutas. Et calculum continuando, Fiet Gravitas in loco Q in Terram, ad gravitatem in loco A in Terram, ut 501 ad 500; & vis centrifuga $\frac{1}{290}$ efficiet ut altitudinis exceſſus in crure $ACca$ ſit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars $\frac{3}{689} = \frac{1}{230}$. ſive in Tellure noſtra ut ſemidiameter Terræ ſecundum æquatorem, ejuſdem ſemiaxem ſive ſemidiametrum per Polum exuperet milliaribus 17. Hæc inquam ita ſe habebunt ex hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtet. Nam ſi materia ad centrum paulo denſior ſit, uti certe eſſe debeat, quam ad ſuperficiem, exceſſus altitudinis ad æquatorem erit paulo major; propterea quod ſi materia ad centrum redundans, qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in terram reliquam uniformiter denſam erit reciproce ut diſtantia ponderis à centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum diſtantiæ à materia illa quam proxime. Gravitas igitur ſub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quam pro ſuperiore computo; & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius aſcendet quam in præcedentibus eſt definitum. Jam vero Galli factis experimentis invenerunt quod pendulorum minutis ſingulis ſecundis oſcillantium longitudo æquatorem verſus minor ſit eâ verſus polos in majore ratione quam ſuperior calculus poſtulat. Et propterea Terra videtur eſſe aliquanto altior ſub æquatore quam pro calculo ſuperiore, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem; prout ratio omnino poſtulat.

Coroll. (1.) Si exceſſus gravitatis in locis circumpolaribus

laribus supra gravitatem ad æquatorem experimentis majori cura institutis accurate tandem determinetur, Determinabitur Mensura Universalis; ea nempe quæ penduli singulis minutis secundis in locis inter æquatorem & polos mediis oscillantis longitudinem accurate definiat. Unde tam Æquatio Temporis per æqualia pendula in locis diversis indicati, quam Proportio semidiametrorum Terræ, ac Densitatis ejus ad centrum, modo uniformiter crescere supponatur, una innotescent.

Coroll. (2.) Cum ratio sit eadem in canali aqua pleno ac in canali fluido quovis pleno, eadem etiam ac in Terra intus fluida, dum interea in Terra solida res aliter se habeat; Cum etiam notum sit per observata & experimenta, quod Terra nostra revera altior sit ad æquatorem quam ad polos, exinde constat aut Terram totam fluidam fuisse cum primum inciperet motus ejus diurnus, aut saltem ingens fluidum intus continuisse, quod cedendo partium ad Polos depressioni & ad æquatorem elevationi locum daret.

Coroll. (3.) Si retardaretur gradatim motus terræ diurnus, nisi ea fluidum interius contineat, quod figuræ mutationi locum dare possit, maria versus polos descenderent, ibique omnia inundarent.

Coroll. (4.) Si Planetæ majoris vel minoris, datæ tamen densitatis motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur inde vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione; propter auctas inde vel diminutas tam curvaturam quam velocitatem in eadem illa ratione; & propterea Differentia semidiametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione. Sin densitas augeatur vel minuatur in ratione quacunque, propter gravitatem in eadem ratione auctam vel diminutam, differentia semidiametrorum minuetur vel augebitur in eadem illa ratione. Hoc est, Differentia semidiametrorum erit in ratione composita ex ratione Temporum Periodicorum duplicata, & ex ratione densitatis simplici, utraque reciproca. Unde cum dif-

ferentia

ferentia ſemidiametrorum in Tellure ſit $\frac{3}{689}$ totius ſemidiametri, & Temporis periodici in Jove $9^h. 56'$. quadratum, ſit ad quadratum temporis periodici 24^h. in Tellure, ut 5 ad 29: & denſitas Jovis ſit ad denſitatem Telluris ut 76 ad 387. Differentia ſemidiametrorum Jovis, erit ad Differentiam ſemidiametrorum Telluris, ut $\frac{3 \times 29 \times 387}{689 \times 5 \times 76}$, ad 1. ſive ut $\frac{33669}{261820}$ ad 1. hoc eſt, ut 1 ad $8\frac{1}{2}$. Eſt ergo ſemidiameter æquatoris Jovis ad ſemiaxem ut $9\frac{1}{2}$ ad $8\frac{1}{2}$. Unde obiter mirum non eſt quod tanta differentia Obſervationi Aſtronomicæ pateat. Sed Notandum quod hæc ita ſe habent ubi uniformis eſt Planetæ denſitas. Sin Materia Jovis denſior ſit ad centrum quam ad circumferentiam, uti prius in genere obſervatum, differentia ſemidiametrorum erit adhuc major, & obſervatu facilior. Viderint itaque Obſervatores Aſtronomici, quam accurate hoc Corollarium cum Jovis diametris per micrometrum menſurandis conveniat.

XCIV. Incrementum ponderis pergendo ob æquatore ad polos eſt quam proxime ut Quadratum ſinus recti Latitudinis: ſive, quod perinde eſt, ut ipſi ſinus verſi Latitudinis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt, & in æquilibrio poſita; & pondera partium ſimilium cruribus totis ſimiliter ſitarum ſunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter ſe, erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciproce ut crura. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut diſtantiæ corporum à centro Terræ. Proinde, ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ conſiſtant, erunt pondera eorum ad invicem reciproce, ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera

dera in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus ſunt reciproce ut diſtantiæ locorum à centro: Et incrementum ponderis in Terra figuræ ſphæroidis oblatæ, quemadmodum demonſtravit Cl. Gregorius, ut quadratum ſinus recti Latitudinis loci; ſive, quod eodem redit, ut ſinus verſus Latitudinis quam proxime. *Aſtron. L.* III. *Prop.* 52. *Vid. Prop.* II. *Coroll.* 2. *prius.*

Corollarium. Cum itaque demonſtraverit etiam eodem in loco Gregorius longitudines pendulorum æquali tempore oſcillantium eſſe inter ſe ut diſtantiæ à centro Telluris reciproce, erit differentiæ longitudinis pendulorum ut quadratum ſinus recti latitudinis: atque ita ubique.

XCV. Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni motibus Lunæ inæqualibus ſunt plane ſimiles & analogi, & à cauſis ſimilibus & analogis oriuntur.

Motus nempe Nodorum in antecedentia, & Apſidum nunc in antecedentia tardius, nunc in conſequentia velocius, exceſſu vero motus poſterioris ſupra priorem in conſequentia. Motus etiam Variationis Satellitum & reliqui id genus eodem ſe habere debent modo in hiſce ſecundariis Planetis ac ſe habent in Luna, ſecundario pariter Planeta; ita ut eos hic loci ſeorſim tractare nullo modo ſit opus. Notandum tamen, parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fieri ut motus Satellitum horum Circumjovialium & Circumſaturniorum præ motibus Lunæ conſimilibus ſumme regulares experiantur; utque Aſtronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut aſſerant tardiſſime retrogradum. Nam Cl. Flamſtedius collatis ſuis cum D. Caſſini obſervationibus nodos Satellitum Circumjovialium tarde regredi deprehendit, Nec dubitandum veniens ævum eccentricitates nonnullas, & apſidum progreſſus, nodos etiam, eorumque regreſſus cum reliquis motibus inæqualibus iis quæ apud Lunam adeo ſunt notabiles analogis certius & explicatius definiturum. Atque hæc impræſentiarum ſufficiant.

Maii 31°. 1708. X XXXVII.

XXXVII.

XCVI. FLuxus & Refluxus Maris à gravitatione aquæ versus Solem & Lunam, sive ab attractionibus Solis & Lunæ oriuntur.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere, ac bis defluere, ex prius demonstratis patet. Quod vero aquæ altitudo maxima in maribus profundis & liberis appulsum Luminarium ad meridianum loci non comitatur quidem, sed sequitur, id que trium circiter horarum spatio, hoc in loco accura tius paulo explicari debet. Quod ita se res habet li quet ex observatis æstibus marinis, tam apud Mar Atlanticum & Æthiopici tractum totum orientalem in ter Galliam & Promontorium Bonæ spei, quam apu Maris Pacifici littus Chilense & Peruvianum; in quibu omnibus littoribus æstus maximus in horam circiter te tiam incidit; nisi ubi motus per loca vadosa propagat aliquantulum retardatur. Ratio autem hujus rei ha est: Ubi Luminare est in Meridiano, conatus sive v attrahens ad maximam suam quantitatem pertigit, lico minuenda; effectus autem hujus vis maximæ no dum ad ἀκμὴν suam pertigit. Motus enim omnis sem impressus perseverat uniformiter, usque dum mot contrarius eundem destruit, aut saltem retardat. Un sequitur fluxum maris, sive potius oceani per sex cir ter horas antemeridianas, si ita etiam de Luna loqui ceat, adauctum, & cum motu diurno conspirando celeratum, celeritate hac sua majore ulterius pergere bere, & aquas etiam magis magisque protrudendo cumulare, usque dum vis eadem contra motum di num postea tendendo motus istius pergentis cursum p latim sistat & sufflaminet; & easdem aquas mox et tardiore gradu incedere & oceani refluxum fieri pro ret. Quæ motus retardatio maxime circa octantes horam tertiam notabilis esse debet. Exempla hu

modi effectuum maximorum post causas suas maximas aliquamdiu insequentium quotannis habemus in æstatis calore, hyemisque frigore, non in ipsis solstitiis æstivis hybernisque, sed circa octantes, ut ita dicam, vel sesquimensem abinde maxime intensis; & quotidie in diei calore summo, qui secunda aut tertia à meridie hora major est quam in ipso meridie; uti ex experentia indubia omnibus constare potest. Dum enim post vires maximas, & aquas inde maxime concitatas vires maximis proximæ & in partem contrariam vixdum conversæ etiamnum operentur, vires pauxillulum minores motibus à maximis concitatis & vi insita pergentibus superadditæ majorem illico effectum ut sortiantur est necesse, quam vires usque crescentes motibus minoribus superadditæ sortiri queant. Deinde notandum, vires ipsas attractrices, aquas directe sursum attrahentes, à maxima sua quantitate per horam unam vel etiam alteram postmeridianam vixdum quoad sensum deficere, licet directio attractionis aquas accelerantis vel retardantis in ipso meridiano ad limitem pertingat, & ibidem speciem mutet. Eo itaque in loco aquæ maxime in cumulum assurgent, ubi partes meridianum nuperrime cum velocitate summa prætergressæ in partes alteras ad quadraturam prius summe retardatas incidant, & ita mutuo conatu occurrentes fluxum omnium maximum efficiant, quod circa horam tertiam accidere est pertissimum. Horas enim hoc in loco non vulgares tantum, quod probe notandum, numeramus; sed eas quæ ab appulsu Solis aut Lunæ ad meridianum loci tam infra horizontem quam supra fluunt, & per Horas diei Lunaris intelligimus vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad meridianum loci cujuslibet revolvitur.

XCVII. Fluxus & refluxus maris, tam à vi Solis quam vi Lunæ seorsim dependentes, non æstum duplicem sed unicum ex virium conjunctione æstimandum procurant.

Quemadmodum enim corpus quodvis duplici vi concitatum in lineis duabus pergere nequit, sed ex conjunctis viribus in parallelogrammi diagonali eodem modo pergit ac si vi unica juxta diagonalis directionem concitatum esset; ita quidem pari ratione motus hi bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione & oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus, è virium nimirum *summa* tum temporis oriundi. In luminarium quadraturis Sol attollet aquam, ubi Luna deprimit, deprimetque, ubi Luna attollit; & æstus omnium minimus, è virium nimirum *differentia* tum oriundus, observabitur. Et quoniam, experientia teste, multo major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra syzygias vero & quadraturas æstus maximus, qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola vi Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ Lunari multo propinquius erit quam tertiæ Solari; adeoque in transitu Lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi Hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem; idque maximo intervallo paulo post octantes Lunæ. Et paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in Transitu Lunæ à quadraturis ad syzygias, idque etiam maximo intervallo paulo post octantes Lunæ. Hæc nempe omnia in Oceano sive aperto mari. Nam in Fluviorum Ostiis fluxus majores cæteris paribus majus tempus requirent, atque ita tardius paulo ad ἀκμὴν suam pervenient.

XCVIII. Æstus marinus propter diversas luminarium distantias à terra tum per singulos annos, tum per singulos menses diversus esse debet; idque in triplicata distantiarum istarum ratione reciproca, sive in triplicata diametrorum apparentium ratione directa.

H

Hoc olim ſuo loco demonſtratum dedimus. Neque mirum certe hoſce & hujuſmodi effectus in minoribus diſtantiis majores, in majoribus minores eſſe. Quocirca Sol tempore hyberno circa Perigæon poſitus majores edet effectus, efficietque ut æſtus poſt ſyzygias paulo majores ſint, ob majorem virium *Summam*, & poſt quadraturas paulo minores, ob minorem virium *Differentiam*, quam æſtivo tempore; cæteris nimirum paribus. Et Luna poſt Perigæon ſingulis menſibus majores ciebit æſtus quam ante vel poſt quindecim dies, ubi in Apogæo verſatur. Unde ſi ſitus Lunæ Perigæus circa conjunctionem accidat, augebitur æſtus diurnus, minuetur nocturnus: ſin ſitus iſte circa oppoſitionem accidat, augebitur nocturnus, minuetur diurnus. Unde etiam fit ut æſtus duo omnino maximi poſt ſyzygias continuas ſe mutuo non ſequantur. Si enim Luna in ſyzygiarum altera ſit circa Perigæon, & æſtum maximum conjunctis cum Sole viribus tum temporis concitet; in altera circa Apogæon verſetur, & minores vires poſſideat eſt neceſſe.

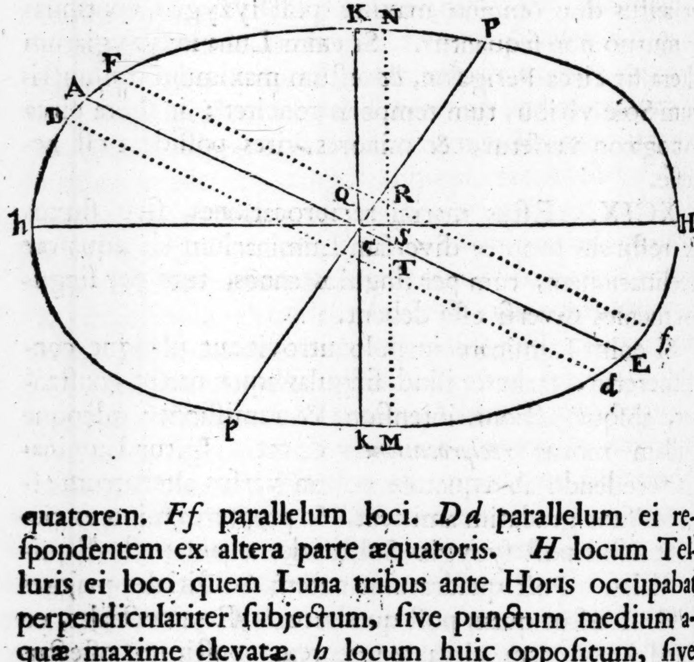
XCIX. Æſtus marini reciprocationes, ſive fluxus & refluxus propter diverſam Luminarium ab æquatore declinationem, tum per ſingulos annos, tum per ſingulos menſes diverſi eſſe debent.

Si enim Luminare in polo utrovis aut utroque conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione: adeoque nullam motus *reciprocationem* cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus alterutrum effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus poſt ſyzygias Solſtitiales quam poſt Æquinoctiales. Poſt quadraturas autem Solſtitiales majores evadent æſtus quam poſt quadraturas Æquinoctiales; eo quod Lunæ jam circa æquatorem conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi poſt ſyzygias, & minimi poſt quadraturas Luminarium, utraſque nimirum Æquinoctiales; & æſtum

maximum post syzygias comitatur semper minimus post quadraturas; ut experientia testatur. Per minorem autem distantiam Solis à Terra tempore hyberno quam æstivo fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum quam sequantur; & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

C. Æstus marini Phænomena nonnulla & Luminarium effectus ex diversa locorum in Tellure Latitudine diversi sunt; & præcipue quidem quoad Diurnos & Nocturnos æstus, se invicem immediate consecutos.

Designet nimirum *ApEP* Tellurem, aquis si placet profundis undique coopertam. *C* centrum ejus *P.p.* Polos. *A. E.* æquatorem. *F* locum quemvis extra æ-



quatorem. *Ff* parallelum loci. *Dd* parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris. *H* locum Telluris ei loco quem Luna tribus ante Horis occupabat perpendiculariter subjectum, sive punctum medium aquæ maxime elevatæ. *h* locum huic oppositum, sive punctum medium aquæ ex altera Telluris parte maxime elevatæ. *K, k* loca inde gradibus 90 distantia. *CH, Cb* Maris altitudines maximas à Telluris centro mensuratas.

ſuratas. & CK, Ck altitudines minimas. Et ſi axibus Hh, Kk deſcribatur Ellipſis, deinde Ellipſeωs hujus revolutione circa axem majorem Hh deſcribatur Sphærois $HPKhpk$, deſignabit hæc figuram maris quam proxime, & erunt CF, Cf; CD, Cd, altitudines Maris in locis F, f & D, d. Quinetiam ſi in præfata Ellipſeωs revolutione punctum quodvis N, deſcribat circulum NM, ſecantem parallelos Ff, Dd in locis quibuſvis R, T, & æquatorem AE in S, erit CN altitudo Maris in locis omnibus R, S, T ſitis in hoc circulo. Hinc in diurna revolutione loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in Q hora tertia poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in f hora tertia poſt appulſum Lunæ ad meridianum infra Horizontem, ultimo defluxus maximus in Q hora tertia poſt ortum Lunæ, & affluxus poſterior in f erit minor quam affluxus prior in F. Diſtinguitur enim totus Oceanus in duos omnino fluctus hemiſphæricos, unum in hemiſphærio $KHkC$, ad Boream, alterum in hemiſphærio oppoſito ad Auſtrum vergente, $KhkC$. quos igitur *Fluctum Borealem*, & *Fluctum Auſtralem* nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuo oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum; interpoſito nempe intervallo horarum Lunarium quaſi duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & Auſtrales magis Auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores in locis ſigulis extra æquatorem. Æſtus autem major Luna in verticem loci declinante incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; &, Luna declinationem mutante, & in partes à vertice remotiores concedente, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima hac de cauſa incidet in tempora Solſtitiorum: præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſetur in principio Arietis; ut ita Luna & vertici proxima, & ab

eodem remotissima eadem revolutione diurna pertranseat. Sic sane experientia compertum est æstus matutinos hyberno tempore vespertinos, & vespertinos æstivo tempore matutinos superare; nimirum ad Plimuthum quidem altitudine pedis unius, ad Bristoliam vero altitudine quindecim digitorum, Observantibus Colepressio & Sturmio. Quod vero differentiæ hæ non tantæ videntur quantæ in regionibus adeo ab æquatore remotis, jure posset ex hac causa expectari, ex alia sane causa oriri potest. Motus enim hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæc motus semel impressi minuit differentiam æstuum alternorum, & æstus proxime post syzygias majores reddit; eosque proxime post quadraturas minuit. Hinc enim fit ut æstus alterni ad Plimuthum & Bristoliam non multo magis differant quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus non sint primi à syzygiis, sed tertii; quod cum prius dictis adprime convenit. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximus in fretis quibusdam & fluviorum ostiis sint quarti vel etiam quinti à syzygiis. Verum hæc hactenus.

Novemb. 8°. 1708.

XXXVIII.

CI. FLuxus Oceani & Refluxus Phænomena in locis particularibus, fretis nimirum, portubus fluviorum ostiis, maribus parvis, & cum oceano aut non omnino aut parum communicantibus; in iis etiam quæ longe ab æquatore distant; à generali æstus maris

lege haud parum recedunt, & à particularibus locorum circumſtantiis plerumque dependent. Exempli gratia; Fieri poteſt ut æſtus propagetur ob Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poteſt motus novos diverſorum generum: Fieri etiam poteſt ut aut itineris longinquitate, aut flexuoſo ſitu, aut obſtaculorum impedimentis æſtus ſiſtatur fere, & minuatur. (Unde ubi plures Inſulæ, ut in Moluccis, Philippinis, in ſinu Mexicano, in Antillis, aut nullus fere aut longe minor eſt æſtus quam in patente & libero oceano.) Fieri poteſt ut æſtus in oceano mediocris, in fluviis evadat maximus, propter tranſitus anguſtias nimirum, & littorum ſenſim coeuntium convergentiam. In maribus etiam parvis nullus erit aut plane contemnendus aquarum motus. Cum enim æſtus maximus in oceano tantum profundo, per gradus 90 in orientem & occidentem patente, accidere debet; quo minus eſt mare, eo minor ut ſit aquarum acceleratio & retardatio, hoc eſt, minor fluxus & refluxus, eſt neceſſum: niſi ſaltem mare cum Oceano ipſo libere communicet. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicet, uti fit in Mediterraneo, æſtus quoque eam ob cauſã minor expectabitur. In iis etiam maribus quæ longe à partibus æquatoreis, ubi æſtus maxime propagari debet, diſtant; præſertim ſi cum Oceano quoque ægre communicent, minimus erit aquarum æſtus, uti fit in Mari Baltico & Septentrionali. Quod etiam fit in maribus Euxino atque Caſpio; non tantum ob ſitum paulo borealiorem, & minimam aut nullam cum Oceano communicationem, ſed ob marium horum etiam parvitatem. In maribus quæ ab oriente in occidentem late patent, uti in mari Pacifico, & Maris Atlantici & Æthiopici partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum 6. 9. 12. vel 15. In mari autem Pacifico, quod profundius eſt, & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in Atlantico

lantico & Æthiopico. In mari Æthiopico ascensus aquæ intra Tropicos minor est quam in Zonis Temperatis, propter angustiam maris inter Africam & Australem partem Americæ. In medio mari aqua nequit ascendere nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat; cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa refluxus & fluxus in Insulis quæ à littoribus longissime absunt perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, quod nuperrime observatum, ubi aqua impetu magno per loca vadosa ad sinus angustos alternis vicibus implendos & evacuandos influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus sunt solito majores; uti ad Plimuthum, & Pontem Chepstowæ, in Anglia; ad montes Sti. Michaelis, & Urbem Abrincatuorum (vulgo Auranches) in Normania; ad Cambaiam & Pegu, in India Orientali. His in locis mare magna cum velocitate accedendo & recedendo littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30. 40. 50. aut interdum 60. Et par est ratio fretorum oblongorum, & vadosorum, & angustorum, uti Magellanici, & ejus quo Anglia circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad Littora vero, quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli libere & subsidere potest, æstus ad 12. circiter pedum altitudinem, si quantitatem generalem mediocrem definire placeat, consurgere est censendus; mensurando nimirum ab ima aquarum refluentium depressione, ad summam affluentium altitudinem. Omnium autem æstuum marinorum maxime mirandus ille est, quem Cl. Halleius nostras ex Nautarum Observationibus patefecit in Portu Regni Tunquini ad Batsham, sub latitudine boreali 20°. 50′. Ibi aqua die transitum Lunæ per æquato-

rem

rem sequente stagnat; dein Luna ad boream declinante incipit fluere & refluere; non bis, ut in aliis portubus; sed semel singulis diebus; & affluxus maximus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum; cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum; dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit quibus antea creverat: &, Luna declinationem mutante, cessat; ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ, & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc Portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano Sinensi, inter continentem & Insulam Luconiam; alter à mari Indico inter continentem & Insulam Borneo. Verisimile videtur æstus duos fere æquales à diversis istis oceani æstibus in hunc portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad meridianum portus. Ubi Luna in hocce suo ad meridianum appulsu versatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt; & sic spatio diei illius efficient, ut aqua nullo æstu cieri videatur. Ubi Luna declinat ab æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti in Propositione penultima explicuimus; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores vicibus alternis. Affluxus autem bini majores aquas suas conjungendo component affluxum altissimum medio inter utrumque tempore: affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem medio ipsorum tempore, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio 24. horarum Lunarium aqua non bis, ut in aliis locis fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem, & semel ad minimam; & altitudo maxima, ubi Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam sextam ab appulsu Lunæ ad meridianum; atque

atque, Luna declinationem mutante, mutabitur in de
fluxum. Æſtus itaque alter ſpatio horarum 12.
mari Indico, & alter ſpatio horarum 6. à mari Sinenſ
per freta illa prius memorata venientes, & ſic in horam
tertiam & nonam Lunarem incidentes, anomalos hos a
quarum æſtus componere videntur. Sed Hæc & hu
juſmodi particularia phænomena vicinorum littorum &
marium obſervationibus ſunt ubique relinquenda.

Scholium. Si calculi Newtoniani ambages refugia
mus, & virium quantitates ſolas reſcire velimus, ſi
ſtatuendum. Summa virium Solarium tam in depri
mendis aquis in regionibus quæ 90. gradibus diſtant
Sole, quam in elevandis in regionibus ſub Sole & Sol
oppoſitis, ſi conjunctim ſumantur; ſive vires totæ So
lares ad agitandum mare ſe habent ad vim gravitatis a
pud nos, ut 1, ad 12.868.200. Cum autem vis cen
trifuga partium Terræ à diurno ejuſdem motu oriunda
quæ eſt ad vim gravitatis ut 1, ad 291, efficiat ut al
titudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſu
polis menſura pedum Pariſienſium 85.200. Vis Sola
ris, de qua jam agimus, cum ſit ad vim gravitatis ut
ad 12.868.200, atque adeo ad vim illam centrifugam
ut 291 ad 12.868.200, ſeu 1 ad 44.221, efficiet u
altitudo aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſiti
ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90. gradibus di
ſtant à Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis, &
digitorum undecim: nempe juxta hanc analogiam
44.221 : 1 : : 85.200 : $1\frac{11}{12}$. Vires autem Lunæ a
mare movendum, quæ hic principalem locum obtinent
ex earundem ad ſolares ratione deducendæ ſunt; & pe
effectus ſive motuum in ſyzygiis *ſummas*, in quadra
turis *differentias* dignoſcendæ: ſunt autem Vires Lun
ex hoc calculo, ad Vires Solis, ex collatis obſervatio
nibus ut $6\frac{1}{3}$, ad 1 quam proxime; ſive numero rotund
Secuplæ.

Coroll. (1

Coroll. (1.) Cum igitur, ut prius vidimus, Vires Solis aquam ad altitudinem duorum fere Pedum elevare debeant, Vires Lunæ paulo plusquam secuplæ Solarium aquam ad altitudinem pedum 12. elevare debent: & Vires Lunares & Solares conjunctim in syzygiis eandem ad pedes 14, in quadraturis ad pedes 10. elevabunt. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit; & motuum quantitati prius definitæ probe respondet; & tam probe respondendo æstuum causam recte hic assignatam esse plane confirmat.

Coroll. (2.) Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis, ex prius demonstratis, tantum ut 1, ad 2.031.821; perspicuúm est quod vis illa sit longe minor quam quæ vel in Experimentis Pendulorum, vel in Staticis, aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstu marino solo hæc vis sensibilem effectum edere potest.

Coroll. (3.) Quoniam Vis Lunæ ad mare movendum, est ad Solis vim consimilem ut $6\frac{1}{3}$ ad 1; & vires illæ sunt ut densitates corporum, sive quantitates materiæ æquali spatio contentæ, & ut cubi distantiarum sive diametrorum conjunctim: ipsa enim corpora æque densa sunt ut cubi diametrorum verarum directe, ad eandem nempe distantiam: & vires motrices in hoc casu sunt etiam ut cubi distantiarum reciproce, sive ut diametrorum apparentium cubi directe; atque adeo perinde est sive Sol propius sit sive remotius, sive major sit sive minor, modo diameter apparens certa sit ac determinata. Erit itaque densitas Lunæ, ad densitatem Solis, ut effectus; sive ut $6\frac{1}{3}$, ad 1; & ut Cubus diametri apparentis Lunæ, ad Cubum diametri apparentis Solis, hoc est, ut $6\frac{1}{3}$ ad 1; & ut 720, ad 672 conjunctim $= 6\frac{1}{3} \times 720$ ad 1×672. sive ut 34 ad 5. fere. densitas autem Solis est ad densitatem Terræ, ut 100 ad 387. Erit itaque densitas Lunæ, ad densitatem Terræ, ut 9 ad 5 quam proxime: sive fere dupla. Est igitur

corpus

corpus Lunæ fere duplo densius, &c, ut ita dicam, terrestrius quam Terra nostra; uti olim anticipando exposuimus.

Coroll. (4.) Unde cum vera Lunæ diameter, sit ad veram Terræ diametrum, ut 5 ad 18, sive ut 1 ad 3,65: erit massa Lunæ, ad massam Terræ, ut istorum numerorum Cubi, cum densitatis ratione compositi; sive ut 1 × 9 ad 49 × 5. hoc est, ut 1 ad 26, quam proxime.

Coroll. (5.) Gravitas acceleratrix, sive corporum æqualium pondus in superficie Lunæ, erit ut quantitas materiæ in Lunæ, ad quantitatem materiæ in Terra, cum duplicata distantiarum à centris ratione reciproca composita; hoc est, ut 1 × 13, ad 26 × 1, sive duplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie Terræ, uti olim quoque anticipando docuimus.

CII. Figura corporis Lunaris (abstrahendo nimirum ab elevatione partium æquatorearum & depressione polarium, à motu ipsius diurno pendentium,) est aliquantulum Ovalis vel Sphæroidis oblongæ; cujus axis maximus productus per centrum terræ transit; & superat axes minores eidem normales excessu pedum 180 circiter. Si corpus Lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus citimis & remotissimis elevandum, esset ad vim Lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub Luna & iisdem oppositis attollitur, ut Vis attrahens Terræ, ad vim attrahentem Lunæ; sive ut quantitas materiæ in Terra, ad quantitatem materiæ in Luna, ob æquales nempe distantias; nisi quatenus minor Lunæ diameter eandem rationem demutat. Est ergo Vis illa tota in ratione composita ex 26 ad 1, & 5 ad 18; sive ut 26 × 5 ad 1 × 18: hoc est, ut 69 ad 9. Unde cum mare nostrum ex prius demonstratis attollatur vi Lunæ ad pedes 12, Fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere 90. Eaque de causa figura Lunæ sphæroidis esset, cujus maxima diameter sive axis major pro-

ductu

ductus per centrum Terræ transiret, & superaret diametros sive axes perpendiculares excessu pedum circiter 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit.

Corollarium. Inde vero forte fit ut eadem Lunæ facies directius quam alias oporteret in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen Oscillationes, ob parvitatem virium in tantillo axis majoris supra minores excessu, essent longe tardissimæ, adeo ut facies illa quæ Terram semper respicere deberet possit alterum Orbis Lunaris umbilicum, ob motus angularis circa ipsum æquabilitatem, respicere, uti prius expositum; neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

CIII. Cometæ sunt Luna superiores, & in regione Planetarum Primariorum versantur.

CIV. Cometæ in sectionibus Conicis, Umbilicos in centro Solis habentibus, moventur; & radiis ad Solem ductis areas temporibus quidem æqualibus æquales, & in universum temporibus semper proportionales describunt.

CV. Cometarum corpora sunt solida, compacta, fixa, ac durabilia, ad instar corporum Planetarum; ingentibus autem atmosphæris plerumque cinguntur; & caudis nunc brevioribus nunc vero longioribus, ex iisdem in Solis vicinia natis, semper ornantur.

Hæ Propositiones Cometographiam Newtonianam continent, quatenus ad nostrum institutum Universam. Illæ autem tam clare & plene ab ipso Authore proponuntur & explicantur, ut nostro commentario minime indigeant. Manum itaque de tabula.

Novemb. 15°. 1708.

[Quæ sequuntur, è Newtono verbatim descripsimus.]

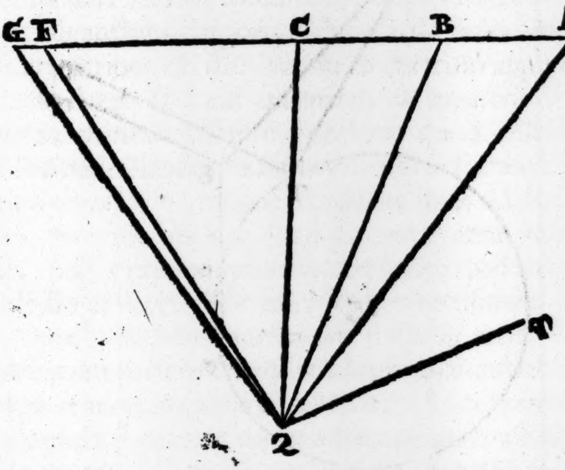
Cometas

Cometas esse Lunâ superiores, & in regione Planetarum versari.

UT defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante, vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius moveri videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. Ac si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ QA, ♈ QB, ♈ QC observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque ♈ QF longitudo ultimo observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur AC ad G, ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam; & jungatur QG. Et si Cometa moveretur uniformiter in linea

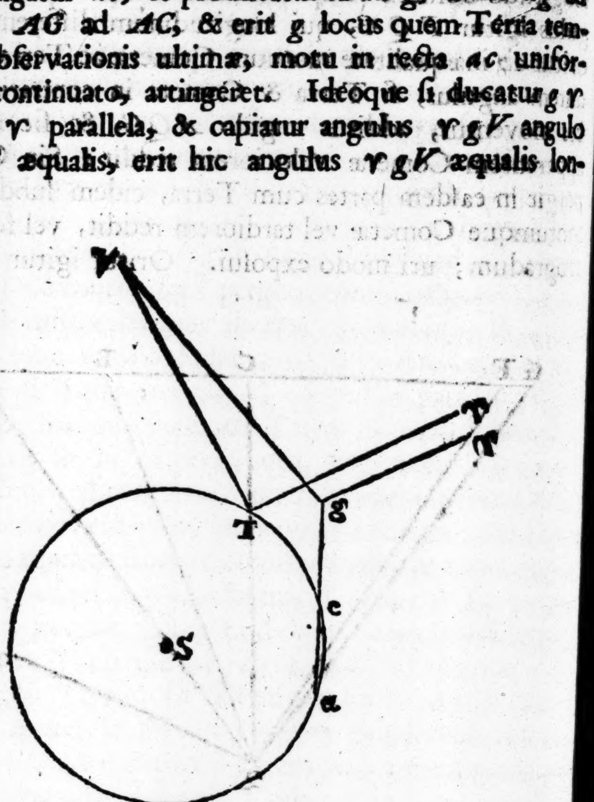
atque

recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus ♈ *QG* longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur *F Q G*, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo *AQG*, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo exposui. Oritur igitur hic an-



gulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia vero Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet *S* Solem, *a c T* orbem magnum, *a* locum Terræ in observatione prima, *c* locum Terræ in observatione secunda, *T* locum Terræ in observatione ultima, & *T* ♈ lineam rectam versus principium Arietis ductam.

Sumatur angulus ♈ *T V* æqualis angulo ♈ *Q F*, hoc est, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut sit *ag* ad *ac*, ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur *g* ♈ ipsi *T* ♈ parallela, & capiatur angulus ♈ *g V* angulo ♈ *QG* æqualis, erit hic angulus ♈ *g V* æqualis lon-



gitudini Cometæ è loco *g* spectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à translatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe Jovis inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur majorem ha-

bet

bet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas meo computo collocavit disparentes Cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas, & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directe, & ratione dimidiata lucis ad lucem inverse. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum à Cl. Flamstedio observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantiæ Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverse, & 12″ ad 30″ directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense Aprili, ut Author est Hevelius, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris vide-

licet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter Capillitii Cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero Nuclei ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quam Planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur à Stellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maxime copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſe ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexa Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni deſcendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus à Capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad Nucleum capitis. Igitur ſi imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra diſcum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplen-

ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem, ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terra Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior Anni 1665 (obſervante Hevelio,) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem Hevelio, in fine Menſis Julii ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad Sept. 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam Hevelius reperit Aug. 6. eſſe tantum 6′. 5″. incluſa coma, at Sept. 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem Hevelius. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa Medium Menſis Decembris, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contingit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus

caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes Cysati, Decem. 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & Decem. 16. (jam in Perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. Jan. 7. Keplerus de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis Dec. conspectum & à Flamstedio observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem gradum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. Decem. 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentem. Decem. 26. velocissime motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. Jan. 3. apparebat ut Stella quartæ, Jan. 9. ut Stella quintæ, Jan. 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. Jan. 25. vix æquabat Stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maxime splenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Coroll. (1.) Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexa.

Coroll. (2.) Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam

in

in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est à latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari solent.

Coroll. (3.) Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

Orbem Cometæ Anni 1680 & 168$\frac{0}{1}$ spectanti & reliqua Phænomena in animo revolventi haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis, & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à Sole. Ideoque cum di-

ſtantia Cometæ à Sole Dec. 8, ubi in Perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æſtivi apud nos ut 1.000.000 ad 36, ſeu 28.000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æſtivum Solem; ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi recte conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio verſantem ex radiis Solaribus concipere poſſet; quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad Solem concepit, & calorem illum diutiſſime conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aere conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt pedes plus minus 40.000.000 latus, diebus totidē, & idcirco annis 50.000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris ob cauſas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarem rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porro notandum eſt quod Cometa Menſe Decembri, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea Menſe Novembri, ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è Cometis oriuntur ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem

dinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu Nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex est opinio, eas vel jubar esse Solis per translucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem esse seu vaporem à capite Cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes a Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem semper volitantibus: adeoque in aere fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aere clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem absque materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum distincte ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab Ægyptiis comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissime contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo Telescopiis evanescunt. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupilli spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat re-

gularem

gularem transmissionem lucis per cœlos absque omni re
fractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ no
soleant videri in Cometis cum eorum lux non est sati
fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis viriu
ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum no
cerni: sciendum est quod lux fixarum plus centum vi
cibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tame
caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosio
est, caudæ vero nullæ: Cometæ autem sæpe caudati
simi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa
sic enim Cometa Anni 1680, Mense Decembri, qu
tempore caput luce sua vix æquabat stellas secund
magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili u
que ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: post
Jan. 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantu
magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui se
satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscu
rissima, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradu
usque duodecimum vel paulo ultra: ut supra dictu
est. Sed & Feb. 9 & 10 ubi caput nudis oculis vide
desierat, caudam gradus duos longam per Telescopiu
contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refr
ctione materiæ cœlestis, & pro figura cœlorum defl
cteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa
iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fie
Atqui Cometa Anni 1680 Decemb. 28. hora $8\frac{2}{3}$ P.M
Londini, versabatur in ♓ 8 *gr.* 41 cum latitudine b
reali 28 *gr.* 6′, Sole existente in ♑ 18 *gr.* 26′.
Cometa Anni 1577 Dec. 29. versabatur in ♓ 8
41′. cum latitudine boreali 28 *gr.* 40′. Sole etiam ex
stente in ♑ 18 *gr.* 26′ circiter. Utroque in casu Te
versabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eade
cœli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (
meis & aliorum observationibus) declinabat angulo g
duum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione Solis Aquilonem versus;
posteriore vero (ex Observationibus Tychonis) dec
natio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudi

cœloru

cœlorum refractione, superest ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus à Sole directe aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea à Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel recta petere, si corpus fumans quiescit; vel oblique, si corpus progredi-

endo

endo loca semper deserit à quibus superiores vaporis parte ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensu vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxt corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate in curvabitur vaporis columna: & quia vapor in column latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibi dem aliquanto densior erit, lucemque propterea copio sius reflectet, & limite minus indistincto terminabitu De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, dequ earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoqu describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mu tationibus aeris nostri, & motibus nubium caudas ali qua ex parte obscurantium oriantur; vel forte à par tibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibu confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendi sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, in telligetur ex raritate aeris Nostri. Nam aer juxta su perficiem Terræ spatium occupat quasi 850 vicibu majus quam aqua ejusdem ponderis, ideoque aeris co lumna Cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponde ris cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Co lumna autem aeris ad summitatem Atmosphæræ assur gens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 alta circiter; & propterea si columnæ totius aereæ pars in ferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua su perior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pe des 32. Inde vero (ex Hypothesi multis experimen tis confirmata, quod compressio aeris sit ut pondus A mosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciproc ut quadratum distantiæ locorum à centro Terræ) com putationem per Coroll. Prop. XXII. Lib. II. ineund inveni quod aer, si ascendatur à superficie Terræ ad a titudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit qua apud nos in ratione longe majori, quam spatii omnis in fra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius d scriptum. Ideoque globus aeris nostri digitum unu

lat

latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes Planetarum regiones ad usque sphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quam rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatiis cœlestibus inque Cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde sufficere ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si rectà ascendat à Sole, ascendere cœpit à capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ di-

divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ Jan. 25. ascendere cœperat à capite ante Decemb. 11. adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ Dec. 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam à Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes à Sole aversas Keplerus ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, à radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in

cor-

corporibus, adeoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram æthream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant à capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadunt, vel simul in ascensu suo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis aut aliis quibuscunque facillime accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt,

bunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuo rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi & cum eorum Atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur continuo ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuo decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor ſpiritum illum, qui aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe par-

parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modo Phænomena eorum Hevelius recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terra distantiis, obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decem.* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mense *Novem.* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigiensi Novem.* 19. Cometa hicce luce sua quamtumvis plumbea & obtusa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur quod materia capitis sub initio copiosior esset & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, describantur subobscura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora septima Vesp. *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, Cometam videt Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda.

 Unde

Unde etiam in Portugallia quartam fere cœli partem (id est gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput à Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1101 vel 1106. *cujus Stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis Feb. circa vesperam ad occasum Solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. I. Meteor 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *Cometa sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem, vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometas esse genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores esse solent

qui

qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, & in orbibus minoribus revolvi rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquimus.

XXXIX.

EXPOSITA jamjam Philosophia Newtoniana, *Halleianam Cometographiam*, Newtonianæ succenturiatam, & inædificatam, exponere conabimur. Et cum Opus hocce Cl. Halleii sit per se nobilissimum, at succinctius paulo atque obscurius traditum, utpote grandioris tantum operis prodromum; neque alibi in Tyronum usum facilius explicatum etiamnum extet, Integrum illud hoc in loco, verum perpetuo Commentario auctum atque illustratum exponere, & iterato in publicum dare volui. Præfatio quidem Historica iidem præfixa commentario non indiget; eandem tamen, nequid præclari hujusce operis hic loci desideretur, exscribere non gravabor. Sic vero se habet.

Astronomiæ Cometicæ Synopsis.

" Veteres Ægyptii & Chaldæi, siqua Fides Diodoro Siculo, longa observationum serie instructi, Cometarum ἐπιβολὰς [sive exortus] prænunciare valuerunt. Cum autem iisdem artibus etiam Terræ Motus ac Tempestates prævidisse dicantur, extra dubium est Astrologiæ potius calculo fatidico, quam Astronomicis motuum Theoriis, eo-

Act. Philosoph. Num. 297. pag. 1882, &c. An. Domini. 1705. Mense Martio.

 " rum

“ rum de his rebus ſcientiam referendam eſſe. Ac vix
“ alia à Græcis, utriuſque populi victoribus, reperta
“ eſt apud eos doctrina; adeo ut eam, quam nunc eo
“ uſque proveximus, Aſtronomiam, Græcis ipſis, præ-
“ ſertim magno Hipparcho, uti inventoribus, accep-
“ tam debeamus. Apud hos vero Ariſtotelis ſenten-
“ tia, qui Cometas nihil aliud eſſe voluit quam vapo-
“ res ſublunares, vel etiam Meteora aerea, tantum ef-
“ fecit, ut hæc Aſtronomicæ ſcientiæ pars longe ſub-
“ tiliſſima omnino neglecta manſerit; cum nemini o-
“ peræ pretium viſum fuerit vagas & incertas fluitan-
“ tium in æthere vaporum ſemitas adnotare, ſcriptiſque
“ mandare; unde factum ut ab illis nihil certi de motu
“ Cometarum ad nos tranſmiſſum reperiatur.

“ Seneca autem Philoſophus, perpenſis duorum in-
“ ſignium ſui temporis Cometarum Phænomenis, non
“ dubitavit iis loca inter corpora cœleſtia aſſignare, Sy-
“ dera eſſe cum mundo duratura exiſtimans, quanquam
“ motus eorum legibus nondum compertis regi fateatur.
“ Tandemque Vaticinio non irrito promittit aliquando
“ futura ſecula, quibus hæc tam occulta *dies extraheret*
“ *ac longioris ævi diligentia*: quibuſque admirationi fo
“ ret hæc *Veteres* neſcire potuiſſe; poſtquam *Demon*
“ *ſtraverit aliquis* Naturæ Interpres *in quibus Cœli parti*
“ *bus Cometæ errent, quanti, qualeſque ſint*. Ab ha
“ autem Senecæ ſententia in diverſas partes abiit pen
“ omnis Aſtronomorum Cohors; ac ipſe Seneca, nequ
“ phænomena motus, quibus opinionem hanc tueretur
“ neque tempora adſcribere dignatus eſt quæ poſteri
“ ad hæc definienda uſui forent. Ac evolutis pluri
“ mis Cometarum hiſtoriis nihil omnino invenio quo
“ huic negotio inſervire poſſit ante annum à Chriſt
“ nato 1337 quo Nicephorus Gregoras Hiſtoricus &
“ Aſtronomus Conſtantinopolitanus nobis Cometæ ſe
“ mitam inter fixas ſatis accurate deſcripſit: tempo
“ autem nimis laxe conſignavit: ita ut non ni
“ quod abhinc quadringentis pene annis apparuerit l

“ br

" bricus & incertus hic Cometa Catalogo, quem damus, " inſeri mereatur. Dein Cometa Anni 1472 omnium velociſſimus ac terris proximus Regiomontanum habuit Obſervatorem. Hic magnitudine ac " Coma terribilis, unius diei ſpatio 40 gradus ſub circulo cœli maximo emenſus eſt, ac omnium primus " eſt de quo obſervata idonea ad nos pervenere. Quotquot autem Cometas conſiderarunt, uſque ad tempora Tychonis Brahe, magni illius Aſtronomiæ reſtauratoris, eos ſublunares eſſe autumarunt, adeoque " parvi penderunt, utpote pro Vaporibus habitos. Anno " autem 1577. (Tychone jam ſtudio aſtrorum ſerio " incumbente, comparatiſque Machinis ingentibus pro " dimetiendis cœli arcubus majori cum cura & certitudine quam Veteribus ſperare fas erat) Emerſit Cometa ſatis conſpicuus; cui obſervando ſtrenue ſeſe accinxit Tycho; multiſque & fidis experimentis deprehendit nulli, quæ ſentiretur, Parallaxi diurnæ " obnoxium fuiſſe; adeoque non tantum non fuiſſe " Vaporem aereum, ſed & etiam multo ſuperiorem " extitiſſe Luna: imo nihil obſtabat quin inter ipſos " Planetas collocaretur; fruſtra interim contra obſtrepentibus Scholaſticorum nonnullis.

" Tychonis vero eximiam in obſervando induſtriam excepit Kepleri ſagaciſſimum & pene divinum " ingenium. Hic Tychonis laboribus fretus, & Syſtema Mundi verum & Phyſicum adinvenit, ac ſcientiam Aſtronomicam in immenſum auxit. Monſtrato ſcilicet Planetas omnes in planis per Solis Centrum tranſeuntibus revolvi, Curvaſque Ellipticas deſcribere; ea lege, ut Areæ Sectorum Ellipticorum " ad Centrum Solis in Ellipſeos foco conſtituti temporibus, quibus deſcribantur arcus, ſemper proportionales ſint. Invenit etiam Diſtantias Planetarum à " Sole eſſe in ſeſquialtera ratione temporum periodicorum; ſive Cubos Diſtantiarum eſſe ut Quadrata Temporum. Tanto autem artifici affulſere duo Cometæ;

" quorum alter maxime illustris. Ex horum observa-
" tis conclusit Keplerus, non uno parallaxis annuæ in-
" dicio Cometas inter Orbes Planetarum liberrime qua-
" quaversum ferri: motu quidem non multum à recti-
" lineo diverso; sed quem nondum definire licuit. Ac
" Hevelius, Tychonis æmulus, Kepleri vestigiis insi-
" stens eandem Hypothesim Motus rectilinei amplexus
" est; ipse plurium Cometarum Observator perquam
" subtilis. Cœlo tamen Calculum suum non penitus
" consentire questus est; Viamque Cometicam versus
" Solem incurvari ei suboluit. Tandem de summo
" cœlo lapsus est prodigiosus ille Cometa Anni 1680.
" quasi Casu perpendiculari Solem petens, & exinde
" pari velocitate assurgens: Hic per quatuor Menses
" continuos visus, insigni ac peculiari curvitate Or-
" bitæ ad investigationem Motus Theoriæ præ cæteris
" idoneus erat: instructis autem jampridem Regiis
" Observatoriis, Parisiensi & Grenovicensi, ac Astro-
" nomorum Clarissimorum curæ commissis, accidit ut
" hujus Cometæ Motus apparens, quantum forsan Mor-
" talibus fas est, accuratissime à Cassino & Flamstedio
" observaretur.

" Non multo post, dum Geometrarum Princeps il-
" lustrissimus Newtonus operam dabat *Principiis Philo-
" sophiæ Mathematicis*; Non solum inventa Kepleri in
" Systemate Planetario locum habere demonstravit, ve-
" rum etiam Cometarum Phænomena omnia ex iisdem
" Principiis evidenter consequi. Id quod exemplo
" prædicti Cometæ Anni 1680 abunde illustravit
" modumque docuit Geometrice construendi Orbitas
" Cometarum, Problemaque arduum, ac tanto Oedipo
" dignum summa cum omnium admiratione resolvit.
" Cometam autem hunc in orbe parabolico Solem cir-
" cumiisse probat; ita ut areæ ad centrum Solis æsti-
" matæ temporibus proportionales fuerint.

" Tanti Viri vestigia insecutus eandem methodum
" calculo arithmetico accommodare aggressus sum

" inqu

" inquit Cl. Halleius, nec irrito conamine. Undique
" enim conquisitis Cometarum Observationibus, Ta-
" bellam immensi pene calculi fructum obtinui; exi-
" guum quidem, sed non ingratum Astronomis munus.
" Hi etenim numeri vim habent omnia quæ de motu
" Cometarum hactenus observata sunt accuratissime re-
" præsentandi, ope solius Tabulæ Generalis insequentis:
" cui adornandæ nullis sane peperci laboribus, ut per-
" fecta prodiret; utpote posteritati consecrata, ac cum
" scientia Astronomica duratura.

Hactenus Cl. Halleius sine Interprete. Jam vero reliquam Cometographiæ partem in membra discerptam ut Commentario illustremus res ipsa postulat.

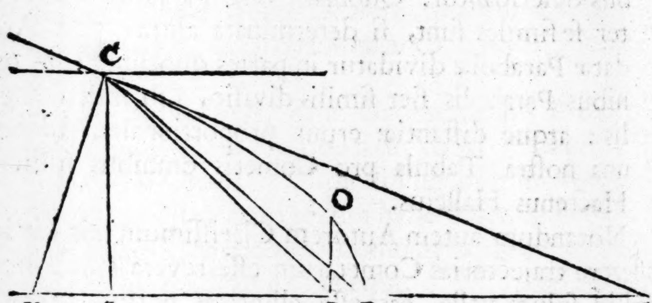
Tabulæ generalis Constructio & Usus.

" Ut Planetæ in Orbibus Ellipticis, ita Cometæ
" in Parabolicis, Solem in Foco communi situm am-
" biunt; ea lege, ut Areæ æquales æqualibus tempori-
" bus describantur. Quoniam vero Parabolæ omnes in-
" ter se similes sunt, si determinata aliqua pars Areæ
" datæ Parabolæ dividatur in partes quotlibet; in om-
" nibus Parabolis fiet similis divisio, sub iisdem angu-
" lis: atque distantiæ erunt proportionales. Ideoque
" una nostra Tabula pro Cometis omnibus sufficiet.
" Hactenus Halleius.

Notandum autem Autorem Clarissimum non hic loci asserere trajectorias Cometarum esse revera Parabolicas; sed id solum velle, eas esse ellipticas potius, uti postmodum liquebit; sed adeo eccentricas, ut pars illa orbitarum ellipticarum quæ mundum Planetarium spectat, & quæ circa Solem & Tellurem versatur, sive quam nos Terricolæ videre possumus, tantillum à lineæ parabolicæ parte curvata & congeneri discrepare, ut vice ellipseos Parabola tuto & sine sensibili errore assumi possit. Prius enim monitum ellipses omnium specierum esse posse, & concentricas in Circulos, infinite eccentri-

cas in Parabolas degenerare. Neque proinde mirum ſi loco ellipſeωs, figuræ difficilioris contemplationis, & ignotæ, in hoc caſu, ſpeciei, Parabolam contemplatu longe faciliorem, & unius ſemper ſpeciei adhibere cupiamus: eo nempe in loco ubi phænomena Cometarum trajectorias tantum non Parabolicas nobis planiſſime exhibere dignoſcuntur. Areæ æquabilitatem, Planetas æque ac Cometas ſpectantem, olim expoſuimus; neque actum prius nunc agere ſuſtinebimus. Palam autem eſt ſimiles figuras, ut circulos & parabolas, qualeſcunque ſint, ſimiles partium, atque proportionales linearum correſpondentium diviſiones, numeris iiſdem exprimendas, admittere & poſtulare. Pergat Halleius.

" Calculi autem hujus Tabulæ hæc eſt ratio. In
" Schemate, ſit *S*. Sol. *P O C* Orbita Cometæ. *P*
" perihelion. *O* Locus ubi Cometa quadrante diſtat à
" Perihelio. *C* locus quivis alius. Junge *CP*. *CS*.
" ac fiant *ST*. *SR* æquales ipſi *CS*. ac ductis rectis



" *CR*, *CT*. (quarum hæc Curvæ Tangens eſt, illa per-
" pendicularis,) in axem *P S R* demitte Normalem
" *CQ*. Jam data quavis Area *COPS* oportet angu-
" lum *CSP*, & diſtantiam *CS* inquirere. Hæc Au-
" thor.

Nimirum uti in Aſtronomia Planetaria locum Planetæ,

netæ, ſive diſtantiam ab Axe Ellipſeω̄s angularem, quam ejuſdem ***anomaliam veram*** dicimus una cum ***diſtantia à Sole*** abſoluta, imprimis quærimus; ita & in Cometis, ſimilem angulum & diſtantiam ut primo inveſtigemus eſt neceſſe. Notandum autem ex natura Parabolarum omnium Lineam *SO* eſſe Lateris recti dimidiam. *SP* ejuſdem Lateris recti partem quartam, ſive ipſius *SO* dimidiam: atque ducta ad punctum quodvis ut *C* tangente *CT*, erectaque ad eandem linea perpendiculari *CR*, axem ſecante, & dimiſſa ab eodem puncto *C* ad axem perpendiculari *CR*, axem ſecante *CQ*; eſſe *SC*, *SR*, & *ST* inter ſe æquales: eſſe quoque lineas *PQ*, *PT*, inter ſe æquales; & lineam *QR* eſſe ipſi *SO*, ſive Lateris recti ſemiſſi æqualem. Quæ omnia ex Conicis ſunt notiſſima. Pergat Author.

"Jam data quavis Area *COPS* oportet angulum *CPS*, " & diſtantiam *CS*, inquirere. Quoniam ob naturam " Parabolæ recta *RQ* ubique æqualis eſt ſemilateri " recto. Ponatur latus rectum $= 2$; adeoque $RQ =$ " 1: ac ſit recta $CQ = z$. erit itaque $PQ = \frac{1}{2} zz$; " ac Segmentum Parabolicum $COP = \frac{1}{12} zzz$; Tri- " angulum autem *CSP* erit $\frac{1}{4} z$. adeoque area mixti- " linea *COPS* erit $= \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{4} z = a$. ac $z^3 +$ " $3z = 12a$. Quare reſoluta hac æquatione Cubica, " z, ſive ordinatim applicata *CQ* innoteſcet. Hæc " Halleius.

Obſervandum autem probe viam hic analyticam ſterni inveniendæ anomaliæ coæquatæ in parabola, ex data ſemper anomalia media, hoc eſt, area deſcripta, tempori deſcriptionis ubique proportionali. Neque ſine analyſi ex data area ſive anomalia media, angulus *CST* ſive anomalia coæquata directe inveniri poteſt. Quod vero ex hypotheſi quod linea primo quærenda *CQ* (ex ea enim inventa angulus *CST* facile reperietur, uti mox patebit.) dicatur z, linea *PQ* æquabitur $\frac{1}{2} zz$ demonſtratu eſt perfacile: nam ut $RQ = 1$, ad $CQ = z$, ita eadem $CQ = z$, ad *QT*, ſive zz. cujus pars dimi-

dimidia proinde OP æquabitur $\frac{1}{2}zz$. Quod vero ſegmentum Parabolicum COP ex eadem hypotheſi recte exprimetur per $\frac{1}{12}zzz$ ex Conicis etiam facillime conſequitur. Eſt enim area $COPSQ$, ad triangulum CPQ, ſive CPT eidem æquale. ut 4 ad 3: atque adeo area parabolica COP ad CPQ ut 1 ad 3. & cum triangulum CPQ ex perpendiculari CQ ſive z in dimidiam baſin $\frac{1}{4}zz$ ducta, fit $\frac{1}{4}zzz$, erit ejus pars tertia neceſſario $\frac{1}{12}zzz$, æqualis areæ parabolicæ COP. Eſt quoque triangulum CSP, ex perpendiculari z in dimidiam baſin $\frac{1}{4}$, æquale $\frac{1}{4}z$: atque adeo ſumma arearum COP, & CPS, ſive integra area $COPS$ tempori proportionalis erit æqualis ſummæ harum quantitatum, quæ dicitur a: ſive orietur æquatio hæc $\frac{1}{12}z^3 * + \frac{1}{4}z * = a$: & multiplicando utrinque per 12, $z^3 + 3z = 12a$. Quæ eſt æquatio cubica, cujus termini ſecundus & quartus deſunt. Inventa itaque hujus æquationis radice, ſive ipſius z valore in numeris, per methodum, ſi placet, Halleianam alibi exhibitam, vel aliter, Lineæ CQ longitudo innoteſcet. *Q. E. I.*

Audiamus jam ipſum Authorem.

“ Proponatur jam area OPS in partes centenas di-
“ videnda. Hæc area duodecima pars eſt quadrati late-
“ ris recti: adeoque $12a$ æquantur quadrato illo $= 4$
“ Si itaque ſucceſſive extrahantur radices æquationum
“ $z^3 + 3z = 0{,}04 : 0{,}08 : 0{,}12 : 0{,}16$: &c. habe-
“ buntur totidem z, ſive ordinatim applicatæ CQ
“ reſpective; ac diviſa erit area SOP in partes cente-
“ nas. Eodemque modo ultra locum O continuan-
“ dus eſt calculus. Radix autem hujus æquationis cum
“ RQ ſit $= 1$. Tangens eſt tabularis anguli CRQ
“ ſive dimidii anguli CSP; adeoque angulus CS
“ datur. Ejus denique anguli CRQ ſecans RC me-
“ dia proportionalis eſt inter RQ, ſive unitatem, &
“ RT, quæ dupla eſt ipſius SC; ut ex Conicis noti-
“ ſimum eſt. Quod ſi SP ponatur 1, adeoque la-
“ tus rectum $= 4$, ut in Tabula noſtra, ipſa RT eri

“ diſtan

" distantia quæsita, duplum scilicet ipsius SC in pri-
" ore parabola. Ad hunc modum sequentem Tabulam
" elaboravi, repræsentandis omnium Cometarum mo-
" tibus inservientem: hactenus enim nullus ex Obser-
" vatis Parabolæ leges respuit. Hæc Author.

Quod vero area OPS sit pars duodecima quadrati lateris recti hinc liquet; quod ex conicis area OPS sit $\frac{2}{3}$ rectanguli OS in SP; hoc est, rectanguli dimidii lateris recti, in ejusdem partem quartam. Nam $\frac{2}{3}$ in $\frac{1}{8} = \frac{1}{12}$. Numeri autem quivis ut 4. 8. 12. 16. si in secundo Decimalium loco ponantur, uti hic fit, partes centenas rite exprimunt. Ideo autem angulo recto tanquam norma principali computationis contenti sumus, quod periodo integra in parabolis caremus. Ob æquales vero SC, SR, angulus externus trianguli isoscelis CRS, duplo angulo CRS æquabitur. Datoque proinde per tabulas Tangentium angulo CRQ duplum ejus, sive angulus CST, hoc est, *anomalia* Cometæ *coæquata* habetur. Pariter, dato jam angulo CST, si per auream regulam fit, Ut $RQ = 1$, ad anguli istius secantem, ex iisdem Tabulis desumendam; ita ista secans, ad tertiam proportionalem RT; Hujus semissis RS æquatur ipsi SC, sive distantiæ Cometæ à Sole. Q. E. I.

Novemb. 29°. 1708.

XL.

" RESTAT jam, inquit Halleius, præcepta calculi tradere, modumque supputandi locum Cometæ
" visum ex his numeris exhibere. Cometæ autem in
" Parabola moventis Velocitas ubique, est ad Veloci-
" tatem Planetæ gyrantis in circulo circa Solem, ad ean-
" dem à Sole distantiam; ut $\sqrt{2}$, ad 1. ut constat ex

" Prin-

" Principiis Phil. Nat. Math. Lib. I. Prop. 16. Coroll.
" 7. Si itaque Cometa in perihelio ad distantiam æqualem distantiæ terræ à Sole supponatur, erit area diurna, quam describeret Cometa, ad aream quam describit Terra, ut $\sqrt{2}$ ad 1: ac proinde tempus annuum, ad tempus quo Cometa talis describeret quadrantem Orbitæ suæ à Perihelio, ut 3.14159, &c. (hoc est, ut area circuli) ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$. Hæc ille.

Prop. XXII. *prius.*

Quod velocitas in parabola sit ad velocitatem, pro eadem distantia, in circulo ut $\sqrt{2}$ ad 1. vel ut 10 ad 7 fere, olim demonstravimus: sive potius ex natura curvaturæ circularis & parabolicæ, & ratione subtensarum anguli contactuum in hisce curvis, instar Corollarii, deduximus. Tempus autem in circulo ecliptico annuum, sive tempus revolutionis integræ per circuli aream integram, ex semiperipheriæ in radium ductu æstimandam, expositum; erit ad tempus descriptionis arcus quadrantalis in parabola, per parabolæ aream quadrantalem ex ductu $\frac{2}{3}$ semilateris recti in ejusdem *lateris* sive *radii* quadrantem æstimandam, expositum; ut ipsæ areæ; sive ut altitudines rectangulorum ad communem basin: nisi quatenus velocitas descriptionis in Parabola istam temporum rationem turbat, & minuit, in ratione 1 ad $\sqrt{2}$. itaque vice $\frac{2}{3}$ adhibeatur $\sqrt{\frac{4}{9}}$: & duplicetur numerator propter numerum quadratum, scilicet binarium, unitatis duplum, hoc est, pro circulo adhibeatur ejus area 3.141.59. pro Parabola $\sqrt{\frac{8}{9}}$. atque ita facile intelligetur ratiocinii Halleiani veritas. " Pergat autem ille:
" Cometa igitur describeret quadrantem illum diebus 109. 14^h. 46′, adeoque area illa parabolica, areæ *POS* analoga, in centum particulas distributa, singulis diebus competunt particulæ 0.912.280, cujus Logarithmus, nempe 9.960.128 in perpetuum usum servandus est. Tempora autem quibus Cometa in distantia majore vel minore quadrantes similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, hoc est, in

" sesqui-

" ſeſquiplicata ratione diſtantiarum; adeoque areæ di-
" urnæ, in partibus centeſimis quadrantis æſtimatæ,
" (quas medii motus menſuras, inſtar graduum poni-
" mus) ſunt in ſingulis in ſubſeſquialtera ratione diſtan-
" tiæ periheliæ à Sole.

Medius nempe motus diurnus 0.912.280 Logarithmo *Negativo* — 0.039.872 ex antiquiore more exprimendus, more hic loci novo *Poſitivo* 9.960.128. ad evitandas nempe characteriſticæ negativæ moras, exprimitur: rejecto nimirum in additione denario, cum uſus venerit, ut formæ conſuetæ æquivaleat. Recte autem hic notat Halleius in diverſis Parabolis quadrantem eodem quidem partium numero, nempe centenario, ubique cenſeri; ita tamen ut partes iſtæ revera inæquales, & pro magnitudine Parabolæ majores, pro parvitate minores ſint, & ea quidem ratione majores vel minores, non qua ipſæ à Sole diſtantiæ creſcunt, vel decreſcunt, ſed in ejuſdem ſubſeſquialtera: ita ut diſtantiarum Quadrata ſint inter ſe ut harum partium Cubi reciproce.

" His neceſſario præmiſſis proponatur alicujus è Co-
" metis noſtris Locum viſum ad datum tempus ſuppu-
" tare. Primum itaque Solis locus ab æquinoctio in
" promptu ſit; ejuſdemque diſtantiæ à Terra Loga-
" rithmus. 2°. Capiatur intervallum temporis inter
" tempus Perihelii & tempus datum, in diebus parti-
" buſque diei decimalibus. Hujus numeri Logarithmo
" addatur Logarithmus conſtans 9.960.128. ac com-
" plementum Arithmeticum ſeſquialterius Logarithmi
" diſtantiæ periheliæ à Sole. Summa, Logarithmus
" erit motus medii in prima columna tabulæ generalis
" quærendi. 3°. Cum motu medio capiatur in ta-
" bula correſpondens angulus à Perihelio; & Loga-
" rithmus pro diſtantia à Sole: ac in Cometis directis
" *adde*, in retrogradis *ſubduc*; ſi fuerit tempus poſt
" perihelium: vel in directis *ſubduc*, & in retrogradis
" *adde*; ſi fuerit ante Perihelium; angulum ſic inven-
" tum à loco, [ſubtrahe] vel ad locum Perihelii [adde]

" &

" & habebitur Locus Cometæ in Orbita propria: & ad
" Logarithmum pro distantia ibidem inventum adda-
" tur Logarithmus distantiæ periheliæ: Summa erit
" Logarithmus distantiæ veræ Cometæ à Sole. 4°. Cum
" Loco Cometæ in Orbita, dato loco Nodi, Capiatur
" distantia Cometæ à Nodo; ac dato Inclinatione plani,
" dabuntur notissimis Trigonometriæ præceptis Locus
" Cometæ ad Eclipticam reductus, cum inclinatione
" sive Latitudine Heliocentrica; ac distantiæ curtatæ
" Logarithmus. 5°. Ex his datis iisdem omnino re-
" gulis quibus loca Planetarum ex dato loco & distan-
" tia Solis, obtinebitur Locus Visus, seu Geocentri-
" cus, cum Latitudine Visa. Id quod exemplo uno
" vel altero operæ pretium erit illustrare. Hæc ille.
Quod ad Locum Solis attinet, ejusque à Terra distantiam, utrumque calculo Astronomico reperire alibi docuimus. Distantiarum autem Logarithmos, incuria quadam illic omissos, ad calcem hic dabimus; ut huic negotio æque ac reliquis Astronomiæ usibus possit inservire. Ideo autem Logarithmus dierum additur dato unius diei Logarithmo, ut motus unius diei, per dierum numerum multiplicatus intelligatur: notum enim est additionem Logarithmorum, numerorum Logarithmis correspondentium multiplicationem inferre. Atque hæc suffecerint, modo Cometa in Perihelio suo ad distantiam Radio Orbis magni æqualem pertransire supponatur. Sin, quod plerumque (si non semper) usu venire solet, ad majorem distantiam, uti nonnunquam fit; aut ad minorem, uti sæpius, Cometæ pertranseat; area ista tempori proportionalis augenda est vel minuenda; idque in subsesquialtera istius minimæ à Sole distantiæ ratione: ut ita demum area ista *anomaliam mediam* recte exponere possit. Unde priori Logarithmorum summæ addendus est istius distantiæ sesquiplicatæ Logarithmus, & radius subducendus, juxta aureæ regulæ per Logarithmos administrandæ exigentiam: sive, quod perinde est, istius Logarithmi sesquialterius comple-
men-

mentum Arithmeticum ſolummodo addendum. Neque mirum videri debet quod in diſtantiis *minoribus addendo* Logarithmum, veram rationem adauctam atque eandem in *majoribus* diſtantiis diminutam obtineamus. Multiplicatio enim per fractionem vel partes decimales non minus minuit ſummam, quam multiplicatio per numeros integros eandem auget. Et par eſt ratio additionis Logarithmicæ: uti facile notum. Obſervandum autem Logarithmos in tertia Tabulæ generalis columella conſignatos non eſſe numerorum diſtantiarum à Sole præter radium ſive præter diſtantiam minimam ipſi radio addendorum, ſed numerorum quorum multiplicatione diſtantiam iſtam veram obtineretur. Unde eorundem Logarithmi ſibi invicem ſuperadditi Logarithmum iſtius diſtantiæ à Sole integræ facile exhibebunt. Hiſce rite intellectis calculus haud ægre adminiſtrabitur; nempe ut apud Halleium ſequitur.

E X E M P L U M I.

Quæritur Locus Cometæ Anni 166$\frac{4}{5}$ Martii 1°. 7^{h}. 00′. P. M. Londini. Hoc eſt 96°. 19^{h}. 8′. poſt Perihelion ejus Novemb. 24°. 11^{h}. 52′. Celebratum.

Log. Diſt. Perihel.	10.011.044		°. ′. ″.
Log. ſeſquialt. —	10.016.566	*Perihel.* ♌ ——	10.41.25
	————	*Ang. Correſpond.*	83.38. 5
Comp. Arith. ——	9.983.434	*Comet. in Orb.* ♉	17. 3.20
	9.960.128	☊. ♊.	21.14.00
Log. Temp.	1.985.862	*Com. à Nodo.*	34.10.40
	————	*Red. ad Eclip.*	32.19. 5
Log. Med. Mot.	1.929.424		————
	————	*Com. Helioc.* ♉	.18.54.55
Medius Motus.	85.001	*Incl. Bor.*	11.46.50

Log.

Log. pro dist.	0. 2 5 5. 3 9 6
Log. Perihel.	0. 0 1 1. 0 4 4
Co-sin. Incl.	9. 9 9 0. 7 5 4
Log. dist. Curt.	0. 2 5 7. 1 6 7
Log. dist. ☉.	9. 9 9 7. 9 1 8

	°	′	″
☉. ♓. —	21.	44.	45.
Com. Vis. ♈.	29.	18.	30.
Lat. Vis. Bor.	8.	36.	15.

Exemplum II.

Quæritur Locus Cometæ Anni 1683 Julii 23°. 13h. 35′. P. M. Londini. Vel 13h. 40′. T. æquat hoc est 21°. 10′. 50″. post Perihelion.

			° . ′ . ″
Log. Dist. Perihel.	9.748.343	*Perihel.* ♊. — —	25.29.30
Log. sesquialt. —	9.622.514	*Ang. Correspond.*	56.47.20
Comp. Arith.	0.377.486	*Comet. in Orb.* ♈.	28.42.10
	9.960.128	♉. ♓.	23.23.00
Log. Temp.	1.310.723	*Com. à* ♉.	35.19.10
		Red. ad Eclip.	4.48.30
Log. Med. Mot.	1.648.337	*Com. Helioc.* ♓.	28.11.30
Medius Motus.	44.498	*Incl. Bor.*	35. 2. 0

Log. pro dist.	0. 1 1 1. 3 3 6
Log. Perihel.	9. 7 4 8. 3 4 3
Co-sin. Incl.	9. 9 1 3. 1 8 7
Log. dist. Curt.	9. 7 7 2. 8 6 6
Log. dist. ☉.	0. 0 0 6. 1 0 4

	°	′	″
☉ *Locus* ♌.	10.	41.	25.
Com. Visus ♋.	5.	11.	50.
Lat. Bor. —	28.	52.	00.

Jam vero, ut Calculus hicce Cometicus rite adminiſtretur, Notandum (1°) Logarithmum diſtantiæ minimæ, ſive periheliæ, ea tantum de cauſa hic apponi, ut alterum Logarithmum, ejuſdem ſeſquialterum, ſive ad priorem ut 3 ad 2, rationis nempe ſeſquialteræ indicem, obtineamus. (2°) Hujus Logarithmi poſtremi complementum Arithmeticum Logarithmo conſtanti unius diei additum conficere Logarithmum integri temporis ante vel poſt perihelion. Per Logarithmos enim operando numeri ex. gr. in exemplorum priore ſic ſeſe habebunt. Logarithmus unius diei eſt 9.960.128. & dierum Logarithmus eſt 1.985.862. Hi ſoli ſimul additi Logarithmum medii motus conficicerent, ſi modo diſtantia perihelia eſſet unitati, ſive radio Orbis magni æqualis: Sed cum augenda ſit iſta medii motus area in ratione iſtius diſtantiæ periheliæ ſeſquialterius, ad radium Orbis magni, addendus eſt Logarithmus iſte ſeſquialter 0.016.566, ad priorem Logarithmum; & ſubtrahendus numeri denarii Logarithmus; ſive, quod perinde eſt, addendum ſolummodo Logarithmi ſeſquialterius Complementum Arithmeticum: quod hoc in loco factitatum: Medius vero motus ex ejuſdem Logarithmo jam dato facile innoteſcet. (3°) Dato jam motu medio, ſive *anomalia media*, eidem in Tabula generali angulus correſpondens eſt 83°. 38′. 5″. (inventis nimirum ubi opus, per auream regulam partibus ubique intermediis proportionalibus.) qui ex loco Perihelii apud Leonem 10°. 41′. 25″. *ſubductus*, propter motum nempe Cometæ retrogradum, & poſt perihelion, dat Locum Cometæ in Orbita Propria, ſive *Anomaliam Coæquatam*, apud Taurum 17°. 3′. 20″. (4°) Locum hunc à Loco Nodi deſcendentis apud Geminos 21°: 14′. 00″. ſubtrahe: Reliqua erit diſtantiæ Cometæ à Nodo, 34°. 10′. 40″. (5°) Ut jam Locum Cometæ in Orbita propria ad Eclipticam, pro Planetarum more, reducamus, reſolvendum eſt Triangulum Sphæricum Rectangulum, atque ex dato Angulo &

 Hypo-

Hypotenusa, invenienda sunt Latera reliqua. Nimirum pro reductione ad Eclipticam secundum Longitudinem Heliocentricam, sequens analogia sufficiet.

Ut Radius ———	———	10.000.000
	°. ′. ″.	
Ad Co-sin. Ang.	21.18.30.	9.969.248
Ita Tangens ——	34.10.40.	9.831.890
Ad Tangentem ———	———	9.801.138 = 32°.19′.5″.

Pro Inclinatione sive Latitudine Heliocentrica sequens analogia est adhibenda.

Ut Radius ———	———	10.000.000
	°. ′. ″.	
Ad Sin. ———	34.10.40.	9.749.553
Ita Sin. Ang. Dat.	21.18.30.	9.560.369
Ad Sin. Ang. Quæsit.	——	9.309.922 = 11°.46.44″

(6°) Ut Logarithmum veræ Cometæ à Sole Distantiæ obtineamus, Logarithmum *pro distantia à Sole* in Tabula generali motui medio congruum Logarithmo distantiæ minimæ, sive Periheliæ addere oportebit: *viz.* 0.255.369 + 0.011.044 = 0.266.413: & dein sequentem instituere analogiam.

Ut Radius ——	10.000.000
Ad Dist. à Sole --	0.266.413
Ita Co-sin. Inclin.	9.990.754
Ad Dist. Curt. --	0.257.167

Sive, quod eodem recidit, addendi sunt tres Logarithmi, & abjiciendus, Radii Logarithmus; uti fit exemplis nostris. (7°) Ad Obtinendam Cometæ Longitudinem Geocentricam sive Locum Visum in Ecliptica, hac methodo utendum. Longitudinem Cometæ Heliocentricam 1ˢ. 18°. 54′. 55″. subtrahe à vero S

lis Loco in Ecliptica. 11^s. 21°. 44'. 45''. restabit *Angulus Commutationis* 10^s. 2°. 49'. 50''. Cujus ad circulum complementum est 1^s. 27°. 10'. 10''. sive graduum 57°. 10'. 10''. Hujus dimidium est 28°. 35'. 5''. Unde instituenda est hæc analogia.

Ut Dist. Telluris —	9.997.918			
Ad Dist. Com. Curtat.	10.257.167			
Ita Radius —— —	10.000.000	°.	'.	''.
Ad Tangentem ——	10.259.249 =	61.	10.	3.
Rejectis vero gradibus 45 *rest.* ———		16.	10.	3. *Ergo*
Ut Radius —— —	10.000.000			
AdTang. 16°. 10'. 3''.	9.462.265	°.	'.	''.
Ita Tangens semisummæ	9.736.294 =	28.	35.	5.
AdTang. semidifferentiæ	9.198.559 =	8.	58.	36.

Qua semidifferentia ex semisumma ablata, restant 19°. 36'. 29''. hoc est, *Orbis Parallaxis*. Hac autem Parallaxi à Loco Cometæ Heliocentrico hoc in casu subtracta, datur Locus ejusdem Geocentricus ♈. 29°. 18'. 26''. paulo accuratius, opinor, quam calculus Halleianus eundem exhibet. Quod si Cometæ Distantia à Sole Curtata minor sit distantia Telluris à Sole, uti fit in exemplorum altero, calculus est instituendus juxta morem pro Planetis inferioribus; (uti hic instituitur juxta morem pro superioribus.) Et semidifferentia angulorum, *elongationem à Sole* eo in casu exhibitura, Longitudini Solis in Ecliptica addenda est, vel ab eadem auferenda, ut Locum Cometæ Geocentricum habeamus.

(8°) Ad Latitudinem Cometæ Geocentricam definiendam hæc anologia est adhibenda. (Angulo Elongationis ex aggregato semisummarum conflato.)

	°. '. ''.	
Ut Sinus Anguli Commutationis	57.10.10.	9.924.423
Ad Sinum Anguli Elongationis —	37.33.41.	9.785.053
Ita Tangens Inclinationis —— —	11.46.44.	9.319.161
Ad Tangentem Latitudinis ——	(8.36.09)	9.179.791

 "Mo-

" Momento autem primi Exempli, *Londini* observatum est Cometam applicari ad Stellam secundam *Arietis*; ita ut novem minutis illa borealior repertus sit, ac tribus minutis orientalior: Observante D^no^. *Roberto Hookio*. In secundo autem Exemplo ipse, in vicinia *Londini*, instrumentis quibus olim Stellas Australes observaveram, Cometæ locum deprehendi ♋. 5°. 11′. ½, cum Latitudine Boreali, 28°. 52′, consentiente ad amussim observatione *Grenovicensi* eodem pene momento facta.

" Cometa autem Anni 1680, qui pene Solem attigit, (non enim triente semidiametri corporis Solaris à superficie ejus distabat in Perihelio) cum Latus rectum exiguum admodum sit, Tabula Generali haud coerceri potuit, ob immanem Motus medii velocitatem: præstat itaque in hoc, postquam inventus fuerit Motus medius, ex eodem, ope præcedentis æquationis $zzz + 3z = \frac{4}{100}$ *Mot. med.* Tangentem dimidii anguli à Perihelio elicere, una cum Logarithmo pro distantia à Sole. Quibus datis iisdem omnino regulis ac in cæteris procedendum est.

" Ad hunc itaque modum Astronomico Lectori examinare licet numeros à me positos, quos summa cura ex observationibus quæ suppetebant exantlavi; neque enim, antequam probe ad incudem redacti fuerint, ac multorum annorum studio quantum fieri possit politi, in publicum prodeunt. Hoc autem specimen Astronomiæ Cometicæ, futuri operis Prodromum, editum esse volui; ne forte superveniente fato perirent lucubrationes nostræ, ob Calculi difficultatem non cuivis homini denuo suscipiendæ. Monendu[m] autem est Lector, quinque priores ordine Cometas quorum tertius & quartus est à *Petro Apiano* obser[-] vatus, quintus vero à *Paulo Fabricio*, uti & decimu[s] à *Mæstlino* (ni fallor) anno 1596 conspectus, non e[-] undem certitudinis gradum cum reliquis præ se ferre. Neque enim debitis organis nec cura ad hoc requisit[a]

" ob

" observationes ipsæ peractæ sunt; adeoque inter se
" dissidentes nullo modo cum computo regulari conci-
" liari possunt. Cometam anni 1684 unus videt *Blan-*
" *chinus* observator *Romanus*: ultimum vero Anni sc.
" 1698 *Parisienses* soli conspexerunt, ejusque cursum
" insolito modo designarunt. Obscurus hic admodum,
" etiamsi velox ac terris satis vicinus, nostros sane o-
" culos alioquin non incuriosos effugit. Insignes au-
" tem duos hac nostra ætate Cometas, alterum Anno
" 1689 Mense *Novembri* ortum, alterum Mense *Febru-*
" *ario* Anni 1702, Catalogo subjungere non licuit,
" propter defectum observationum. Etenim versus
" mundi plagas Australes cursum dirigentes, ac in *Eu-*
" *ropa* vix conspicui, contemplatores non habuere ne-
" gotio pares. Quod si forsan ex partibus *Indicis* ad-
" vectæ fuerint accuratæ observationum series ad hoc
" necessariæ; lubens calculum repetere, horumque Or-
" bitas, reliquorum ad modum, Numeris designandi
" laborem suscipere non gravabor.

" Quibus perpensis, ac collatis inter se cæteris ho-
" rum Cometarum motuum Elementis, videre est,
" nullo ordine dispositos esse Orbitas; neque ipsos,
" Planetarum more, Zodiaco comprehendi posse, qua-
" quaversum tam retrograde quam directe indifferen-
" ter latos; unde manifestum est eos motu verticali
" nullo modo circumagi. Quinetiam distantiæ Perihe-
" liæ nunc majores nunc minores reperiuntur; unde pro-
" num est suspicari etiam multo plures esse Cometas,
" qui in partibus à Sole remotioribus, obscuri cauda-
" que destituti, adeoque nobis inconspicui, præterlabi
" possunt.

" Hactenus Cometarum Orbes consideravimus ut
" perfecte Parabolicos; quo supposito consequeretur
" Cometas, vi Centripeta versus Solem impulsos, à
" spatiis infinite distantibus descendere, casuque suo ve-
" locitatem tantam acquirere, ut iterum in spatia Mundi
" remotissima sese abdere possent, perpetuo nisu sursum

“ tendentes, ac ad Solem nunquam reverſuri. Cum au-
“ tem ſatis frequentes ſint Cometarum advenrus; ac
“ eorum nullus reperiatur motu ferri Hyperbolico, ſeu
“ velociore quam cadendo ad Solem acquirere debeat,
“ credibile eſt potius in Orbibus valde Excentricis re-
“ volvi eos circa Solem, ac poſt longiſſimas periodos
“ reverti. Sic enim Numerus eorum præfinitus eſſet,
“ ac fortaſſe non uſque adeo magnus. Spatia autem
“ inter Solem Fixaſque tanta ſunt, ut Cometæ revol-
“ venti cum Periodo quantumvis longa ſatis loci ſit.
“ Latus autem rectum Ellipſis eſt ad Latus rectum Pa-
“ rabolæ eandem Periheliam diſtantiam habentis, ut
“ diſtantia Aphelia in Ellipſi eſt ad Axem totum Ellip-
“ ſis; Velocitates autem ſunt in dimidiata ratione eo-
“ rundem: quapropter in Orbibus valde Excentricis
“ ratio hæc accedit proxime ad rationem æqualitatis.
“ Tantilla autem differentia, quæ intercedit ratione ma-
“ joris in Parabola velocitatis, facillime in ſitu Orbis de-
“ terminando compenſatur. Hujus itaque Tabulæ Ele-
“ mentorum Motuum uſus præcipuus eſt, atque etiam
“ propter quem illam conſtruere operæ prætium duxi,
“ ut, ſi quando novus Cometa emerſerit, poſſimus col-
“ latis elementis dignoſcere an poterit eſſe aliquis ex an-
“ tiquis, necne; ac proinde Periodum, Orbitæque Axem
“ determinare, reditumque prædicere. Ac ſane multa
“ me ſuadent ut credam Cometam anni 1531 ab *Apiano*
“ obſervatum, eundem fuiſſe cum illo qui anno 1607
“ deſcriptus eſt à *Keplero* & *Longomontano*, quemque
“ ipſe iterum reverſum vidi ac obſervavi anno 1682.
“ Quadrant Elementa omnia, ac ſola inæqualitas pe-
“ riodorum adverſari videtur: hæc autem tanta non
“ eſt ut cauſis Phyſicis non poſſit attribui. *Saturni* enim
“ motus à cæteris, præſertim *Jove*, ita interturbatur,
“ ut per aliquot dies integros incertum ſit hujus Planetæ
“ tempus Periodicum. Qanto magis talibus erroribus
“ obnoxius erit Cometa, qui quatuor pene vicibus al-
“ tius excurrit *Saturno*, cujuſque velocitas, vel tantil-

“ lum

" lum aucta, Orbem ab Elliptico in Parabolicum pos-
" sit immutare? Confirmatur etiam eundem esse potu-
" isse ex eo, quod anni 1456 æstate, conspectus fuerit
" Cometa eodem pene modo inter Solem & Terram
" transiens retrograde: quem, licet à nemine observa-
" tus fuerit Astronomice, ex periodo modoque transi-
" tus non diversum à prædictis extitisse conjicio. Unde
" ausim ejusdem reditum fidenter prædicere, anno scil.
" 1758. Quod si hoc evenerit, nulla amplius erit du-
" bitandi causa, quin redire debeant cæteri. Habebunt
" ergo Astronomi in hac arenâ quo se exerceant per
" multa Secula, priusquam tot tantorumque Corporum
" circa commune centrum Solis revolventium numerus
" cognoscatur, ac motuum symptomata certis regulis
" coerceantur. Crediderim equidem Cometam etiam
" anni 1532, eundem fuisse cum illo, qui ab *Hevelio*
" observabatur ineunte anno 1661: sed observationes
" *Apiani*, quas solas de primo habemus, nimis rudes
" sunt, nec quicquam certi in re tam subtili ex iisdem
" elici potest. Justo volumine hæc omnia exequi mihi
" animus est, nec Astronomiæ promovendæ hac in re
" deero, si Deo O. M. visum fuerit vitam facultates-
" que prorogare. Interim quicunque modum Con-
" struendi Cometarum Orbes per tres observationes ac-
" curate habitas addiscere cupit, sub finem libri de Sy-
" stemate Mundi, sive tertii *Philosophiæ Nat. Princip.*
" *Math.* magni ipsius Inventoris methodum inveniet:
" Quam postea Dignissimus Collega meus *D. Gregorius*,
" Lib. V. pereruditæ Astronomiæ suæ Physicæ & Geo-
" metricæ plene & luculenter illustravit.

" Unicum autem non abs re erit nec injucundum,
" hic loci Lectorem monere Astronomum; nempe
" quod nonnulli ex his Cometis Nodos suos habeant
" adeo Orbi Terræ annuo vicinos, ut si forte accide-
" rit, tempore reditus Cometæ *Terram* occupare Loca
" in orbe suo Nodo proxima, dum Cometa incredibili
" cum Velocitate præterierit, Parallaxin etiam habitu-

" rus ſit valde obſervabilem, quæque fuerit ad Solis
" parallaxin in ratione data. Unde occaſione talium
" tranſituum oblata erit anſa, rara quidem ſed optima,
" determinandi Solis à *Terra* diſtantiam; quam hacte-
" nus non niſi mediante parallaxi *Martis* Acronychii,
" vel *Veneris* perigææ, triplo quidem ſolari majore, ſed
" quæ vix ullis inſtrumentis ſentiatur, laxe admodum
" concludere licuit. Quem Cometarum uſum ſug-
" geſſit Clariſſimus Geometra Ds. *Nic. Facio.* Cometa
" etenim anni 1472 parallaxin habuit pluſquam vigeſies
" Solari majorem. Ac ſi Cometa anni 1618 appuliſ-
" ſet, juxta medium Menſis *Martii*, ad Nodum ejus
" Deſcendentem; vel ſi Cometa anni 1684 paulo ci-
" tius ad Nodum Aſcendentem perveniſſet, profecto
" Terris admodum propinqui etiam adhuc magis nota-
" biles habuiſſent parallaxes: Inter omnes vero nullus
" propiore appulſu Terris minatus eſt quam ille anni
" 1680: Hic initio Calculo non amplius ad Boream
" diſtabat ab Orbe noſtro annuo, quam ſemidiametro
" ſolari (ſive Radio Lunaris Orbitæ uti exiſtimo) id-
" que Novemb. $11^d. 1^h. 6'$. P. M. Quo tempore, ſi
" Terræ quoad Longitudinem conjunctus fuiſſet, pa-
" rallaxis ſane Lunari æqualis in Cometæ motu obſer-
" vari potuiſſet. Hæc Aſtronomis dicta ſunto. Quæ
" vero ab hujuſmodi allapſu, vel contactu vel denique
" colliſione Corporum cœleſtium (quæ quidem om-
" omnino non impoſſibilis eſt) conſequi debeant, re-
" rum Phyſicarum ſtudioſis diſcutienda relinquo.

Come-

Cometarum omnium hactenus rite Observatorum, Motuum in Orbe Parabolico Elementa Astronomica.

Com. An.	Nodus Ascend. gr. ′. ″	Inclin. Orbitæ. gr. ′. ″	Perihelion. gr. ′. ″	Distan. Perihel. à Sole.	Log. Dist. Periheli à Sole.	Temp. æquat. Perihelii. d. h. ′.	Perihelion à Nodo. gr. ′. ″	
1337	♊ 24.21. 0	32.11. 0	♉ 5.79. 0	40666	9.609236	*Jun.* 2. 6.25	46.22. 0	Retrog.
1472	♑ 11.46.20	5.20. 0	♉ 15.33.30	54273	9.734584	*Feb.* 28.22.23	123.47.10	Retrog.
1531	♉ 19.25. 0	17.56. 0	♒ 1.39. 0	56700	9.753583	*Aug.* 24.21.18½	107.46. 0	Retrog.
1532	♊ 20.27. 0	32.36. 0	♋ 21. 7. 0	50910	9.706803	*Octob.* 19.22.12	30.40. 0	Direct.
1556	♍ 25.42. 0	32. 6.30	♑ 8.50. 0	46390	9.666424	*April* 21.20. 3	103. 8. 0	Direct.
1577	♈ 25.52. 0	74.32.45	♌ 9.22. 0	18342	9.263447	*Octob.* 26.18.45	103.30. 0	Retrog.
1580	♈ 18.57.20	64.40. 0	♋ 19. 5.50	59628	9.775450	*Nov.* 28.15.00	90. 8.30	Direct.
1585	♉ 7.42.30	6. 4. 0	♈ 8.51. 0	109358	0.038850	*Sept.* 27.19.20	28.51.30	Direct.
1590	♍ 15.30.40	29.40.40	♏ 6.54.30	57661	9.760882	*Jan.* 29. 3.45	51.23.50	Retrog.
1596	♒ 12.12.30	55.12. 0	♏ 18.16. 0	51293	9.710058	*Jul.* 31.19.55	83.56.30	Retrog.
1607	♉ 20.21. 0	17. 2. 0	♒ 2.16. 0	58680	9.768490	*Octob.* 16. 3.50	108.05. 0	Retrog.
1618	♊ 16. 1. 0	37.34. 0	♈ 2.14. 0	37975	9.579498	*Octob.* 29.12.23	73.47. 0	Direct.
1652	♊ 28.10. 0	79.28. 0	♈ 28.18.40	84750	9.928140	*Nov.* 2.15.40	59.51.20	Direct.
1661	♊ 22.30.30	32.35.50	♋ 25.58.40	44851	9.651772	*Jan.* 16.23.41	33.28.10	Direct.
1664	♊ 21.14. 0	21.18.30	♌ 10.41.25	102575½	0.011044	*Nov.* 24.11.52	49.27.25	Retrog.
1665	♏ 18.02. 0	76.05. 0	♊ 11.54.30	10649	9.027309	*April* 14. 5.15½	156. 7.30	Retrog.
1672	♑ 27.30.30	83.22.10	♉ 16.59.30	69739	9.843476	*Feb.* 20. 8.37	09.29. 0	Direct.
1677	♏ 26.49.10	79.03.15	♌ 17.37. 5	28059	9.448072	*April* 26.00.37½	99.12. 5	Retrog.
1680	♑ 2. 2. 0	60. 56.0	♐ 22.39.30	00612½	7.787106	*Dec.* 8.00. 6	19.22.30	Direct.
1682	♉ 21.16.30	17.56. 0	♒ 2.52.45	58328	9.765877	*Sept.* 4.07.39	108.23.45	Retrog.
1683	♍ 23.23. 0	83.11. 0	♊ 25.29.30	56020	9.748343	*Jul.* 3. 2.50	87.53.30	Retrog.
1684	♐ 28.15. 0	65.48.40	♏ 28.52. 0	96015	9.982339	*Maii* 29.10.16	29.23.00	Direct.
1686	♓ 20.34.40	31.21.40	♊ 17.00.30	32500	9.511883	*Sept.* 6.14.33	86.25.50	Direct.
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Hæc Tabula vix indiget explicatione, cum ex Titulis satis pateat quid sibi velint Numeri. Distantiæ autem Perihelia æstimantur in ejusmodi partibus quales media distantia Terræ a Sole habet centies millenas.

Tabula Generalis pro supputando motu Cometarum in Orbe Parabolico.

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. ′ ″		o	gr. ′ ″	
1	1.31.40	0.000077	31	42.55.06	0.062400
2	3. 3.15	0.000309	32	44. 3.20	0.065838
3	4.34.43	0.000694	33	45.10.29	0.069319
4	6. 6. 0	0.001231	34	46.16.35	0.072839
5	7.37. 1	0.001921	35	47.21.36	0.076396
6	9. 7.43	0.002759	36	48.25.33	0.079984
7	10.38. 2	0.003745	37	49.28.27	0.083600
8	12. 7.54	0.004876	38	50.30.19	0.087244
9	13.37.17	0.006151	39	51.31. 8	0.090910
10	15. 6. 7	0.007564	40	52.30.56	0.094596
11	16.34.20	0.009115	41	53.29.44	0.098300
12	18. 1.54	0.010798	42	54.27.32	0.102019
13	19.28.47	0.012609	43	55.24.21	0.105752
14	20.54.54	0.014550	44	56.20.12	0.109490
15	22.20.14	0.016607	45	57.15. 6	0.113240
16	23.44.44	0.018783	46	58. 9. 3	0.116995
17	25. 8.22	0.021072	47	59. 2. 4	0.120756
18	26.31. 8	0.023470	48	59.54.11	0.124518
19	27.52.55	0.025969	49	60.45.25	0.128278
20	29.13.47	0.028570	50	61.35.45	0.132035
21	30.33.40	0.031263	51	62.25.14	0.135792
22	31.52.32	0.034045	52	63.13.52	0.139544
23	33.10.23	0.036916	53	64. 1.40	0.143291
24	34.27.12	0.039864	54	64.48.38	0.147029
25	35.42.59	0.042892	55	65.34.50	0.150762
26	36.57.41	0.045989	56	66.20.13	0.154482
27	38.11.20	0.049154	57	67.04.50	0.158192
28	39.23.54	0.052382	58	67.48.22	0.161890
29	40.35.23	0.055668	59	68.31.50	0.165578
30	41.45.47	0.059009	60	69.14.16	0.169254

Tabula Generalis pro Supputando.

Med. mot.	Angul. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ".		o	gr. '. ".	
61	69.55.58	0.172914	91	86.20.34	0.274176
62	70.36.56	0.176557	92	86.46.20	0.277239
63	71.17.16	0.180188	93	87.11.43	0.280284
64	71.56.56	0.183803	94	87.36.45	0.283306
65	72.35.57	0.187404	95	88.01.27	0.286308
66	73.14.15	0.190978	96	88.25.49	0.289293
67	73.51.59	0.194540	97	88.49.48	0.292252
68	74.29. 6	0.198085	98	89.13.32	0.295201
69	75.05.38	0.201614	99	89.36.54	0.298122
70	75.41.35	0.205122	100	90.00.00	0.301030
71	76.16.56	0.208612	102	90.45.14	0.306782
72	76.51.43	0.212080	104	91.29.18	0.312469
73	77.25.57	0.215529	106	92.12.14	0.318060
74	77.59.41	0.218963	108	92.54. 4	0.323587
75	78.32.54	0.222378	110	93.34.52	0.329042
76	79. 5.35	0.225769	112	94.14.40	0.334424
77	79.37.45	0.229142	114	94.53.30	0.339736
78	80. 9.23	0.232488	116	95.31.22	0.344979
79	80.40.34	0.235809	118	96. 8.22	0.350153
80	81.11.16	0.239127	120	96.44.30	0.355262
81	81.41.31	0.242416	122	97.19.48	0.360306
82	82.11.19	0.245684	124	97.54.17	0.365284
83	82.40.40	0.248933	126	98.28.00	0.370200
84	83. 9.34	0.252159	128	99.00.57	0.375052
85	83.38. 4	0.255366	130	99.33.11	0.379842
86	84. 6. 8	0.258552	132	100. 4.43	0.384576
87	84.33.49	0.261720	134	100.35.45	0.389252
88	85. 1. 5	0.264865	136	101. 5.48	0.393868
89	85.27.58	0.267989	138	101.35.22	0.398428
90	85.54.27	0.271092	140	102. 4.19	0.402930

Motu Cometarum in Orbe Parabolico.

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
142	102.32.41	0.407380	204	113.37.25	0.523406
144	103.00.31	0.411784	208	114. 9.52	0.529705
146	103.27.47	0.416132	212	114.41.23	0.535886
148	103.54.31	0.420430	216	114.12.02	0.541958
150	104.20.43	0.424676	220	115.41.51	0.547922
152	104.46.22	0.428866	224	116.10.52	0.553782
154	105.11.33	0.433012	228	116.39. 7	0.559538
156	105.36.16	0.437110	232	117. 6.38	0.565199
158	106.00.32	0.441164	236	117.33.27	0.570762
160	106.24.23	0.445178	240	117.59.35	0.576233
162	106.47.47	0.449144	244	118.25. 5	0.581616
164	107.10.44	0.453060	248	118.49.57	0.586912
166	107.33.17	0.456936	252	119.14.14	0.592122
168	107.55.27	0.460772	256	119.37.56	0.597252
170	108.17.14	0.564208	260	120. 1. 6	0.602301
172	108.38.37	0.468318	264	120.23.44	0.607274
174	108.59.39	0.472030	268	120.45.52	0.612174
176	109.20.20	0.475705	272	121. 7.30	0.616998
178	109.40.40	0.479340	276	121.28.39	0.621750
180	110.00.40	0.482937	280	121.49.22	0.626438
182	110.20.20	0.486498	284	122. 9.38	0.631056
184	110.39.41	0.490022	288	122.29.28	0.635608
186	110.58.44	0.493512	292	122.48.54	0.640098
188	111.17.28	0.496965	296	123. 7.57	0.644525
190	111.35.55	0.500384	300	123.26.36	0.648893
192	111.54.05	0.503769	310	124.11.40	0.659559
194	112.11.58	0.507121	320	124.54.36	0.669880
196	112.29.34	0.510441	330	125.35.34	0.679876
198	112.46.55	0.513729	340	126.14.44	0.689568
200	113. 4.00	0.516984	350	126.52.12	0.698970

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
360	127.28. 6	0.708104	820	141.49.24	0.970836
370	128. 2.33	0.716976	840	142.10.00	0.978397
380	128.35.38	0.725606	860	142.29.56	0.985771
390	129. 7.27	0.734006	880	142.49.10	0.992970
400	129.38. 4	0.742186	900	143. 7.48	1.000000
410	130. 7.34	0.750160	920	143.25.51	1.006871
420	130.36. 2	0.757930	940	143.43.21	1.013586
430	131. 3.30	0.765516	960	144.00.18	1.020155
440	131.30. 2	0.772918	980	144.16.46	1.026583
450	131.55.41	0.780148	1000	144.32.46	1.032876
460	132.20.30	0.787216	1500	149.26. 8	1.158188
470	132.44.32	0.794122	2000	152.26.15	1.246058
480	133. 7.50	0.800882	2500	154.32.20	1.313703
490	133.30.25	0.807494	3000	156. 7.27	1.368678
500	133.52.20	0.813969	3500	157.22.49	1.414974
520	134.34.18	0.826522	4000	158.24.36	1.454950
540	135.14. 0	0.838600	4500	159.16.36	1.490125
560	135.51.28	0.850187	5000	160. 1.12	1.521521
580	136.27. 6	0.861369	5500	160.40. 5	1.549874
600	137.00.57	0.872155	6000	161.14.24	1.575718
620	137.33.13	0.882575	6500	161.45.00	1.599460
640	138. 3.58	0.892649	7000	162.12.34	1.621417
660	138.33.21	0.902401	7500	162.37.34	1.641838
680	139. 1.29	0.911866	8000	163.00.23	1.660922
700	139.28.25	0.921012	8500	163.21.20	1.678834
720	139.54.16	0.929907	9000	163.40.42	1.695708
740	140.19. 5	0.938549	9500	163.58.38	1.711662
760	140.42.56	0.946951	10000	164.15.20	1.726784
780	141.05.55	0.955124	50000	170.52. 0	2.197960
800	141.28. 3	0.963082	100000	172.45.44	2.399655

[*Post pag.* 339. *Astronom. nostr. desideratur hæc Tabula.*]

Tabula Logarithmorum Distantiarum Terræ à Sole.
Anomalia Terræ Media.

0	Sign. 0.	Sign. 1.	Sign. 2.	Sign. 3.	Sign. 4.	Sign. 5.	0
0	5.007287	5.006375	5.003778	5.000128	4.996381	4.993588	30
1	5.007286	5.006313	5.003669	4.999999	4.996267	4.993522	29
2	5.007284	5.006249	5.003559	4.999870	4.996154	4.993459	28
3	5.007280	5.006184	5.003447	4.999740	4.996042	4.993398	27
4	5.007273	5.006117	5.003334	4.999611	4.995931	4.993339	26
5	5.007264	5.006048	5.003220	4.999482	4.995822	4.993282	25
6	5.007253	5.005977	5.003105	4.999352	4.995714	4.993226	24
7	5.007240	5.005004	5.002989	4.999223	4.995607	4.993173	23
8	5.007225	5.005829	5.002872	4.999094	4.905501	4.993122	22
9	5.007208	5.005753	5.002755	4.998965	4.995397	4.993074	21
10	5.007189	5.005675	5.002636	4.998837	4.995294	4.993028	20
11	5.007167	5.005595	5.002516	4.998702	4.995193	4.992984	19
12	5.007144	5.005513	5.002396	4.998581	4.995094	4.992942	18
13	5.007119	5.005430	5.002275	4.998454	4.994996	4.992903	17
14	5.007092	5.005345	5.002153	4.998327	4.994899	4.992866	16
15	5.007062	5.005258	5.002030	4.998200	4.994804	4.992831	15
16	5.007030	5.065170	5.001907	4.998074	4.994711	4.992798	14
17	5.006997	5.005080	5.001787	4.997948	4.994619	4.992768	13
18	5.006961	5.004988	5.001659	4.997823	4.994529	4.992740	12
19	5.006923	5.004885	5.001534	4.997698	4.994441	4.992714	11
20	5.006883	5.004801	5.001408	4.997574	4.994354	4.992691	10
21	5.006842	5.004705	5.001282	4.997451	4.994269	4.992670	9
22	5.006798	5.004607	5.001155	4.997329	4.994186	4.992652	8
23	5.006752	5.004508	5.001028	4.997207	4.994105	4.992636	7
24	5.005704	5.004408	5.000900	4.997086	4.994025	4.992622	6
25	5.006654	5.004306	5.000772	4.996966	4.993947	4.992611	5
26	5.006602	5.004203	5.000644	4.996847	4.993871	4.992602	4
27	5.006548	5.004099	5.000515	4.996729	4.993798	4.992595	3
28	5.006493	5.003983	5.000384	4.996612	4.993726	4.992591	2
29	5.006434	5.003886	5.000257	4.996496	4.993656	4.992589	1
30	5.006375	5.003778	5.000128	4.996381	4.993588	4.992588	0
0	Sign. 11.	Sign. 10.	Sign. 9.	Sign. 8.	Sign. 7.	Sign. 6.	0

[*Ad pag.* 332. *Astron. Nostræ desiderantur hæ Tabellæ.*]

Annis Christ. Curr.	*Præces. Æquin.* s.	o.	′.	″.
1	0.	5.	19.	20
1501	0.	26.	9.	20
1581	0.	27.	16.	0
1601	0.	27.	32.	40
1621	0.	27.	49.	20
1641	0.	28.	6.	0
1661	0.	28.	22.	40
1681	0.	28.	39.	20
1701	0.	28.	56.	0
1721	0.	29.	12.	40
1741	0.	29.	29.	20
1761	0.	29.	46.	0
1781	0.	30.	2.	40
1801	0.	30.	19.	20
1901	0.	31.	42.	40
2001	0.	33.	6.	0

Mensibus Anni Commun.	s.	o.	′.	″.
Jan.	0.	0.	0.	0
Feb.	0.	0.	0.	4
Mart.	0.	0.	0.	8
April	0.	0.	0.	12
Mai.	0.	0.	0.	16
Jun.	0.	0.	0.	21
Jul.	0.	0.	0.	25
Aug.	0.	0.	0.	29
Sept.	0.	0.	0.	33
Octob.	0.	0.	0.	38
Nov.	0.	0.	0.	42
Decem.	0.	0.	0.	46

Pro Annis Expansis adi *Col.* 3. *pag.* 333.

FINIS.

CORRIGENDA.

PAG. 47. Lin. 30. 31. Lege $29\frac{1}{10}$ bis. & dele $14\frac{2}{3}$ ad 1 bis. Pag. 53. Lin. Ult. *Nota quod ablato* 4 *de* 6 *restant* 2 *positive; unde pergit corpus primum post occursum; & inde motus secundi additione obtinetur,* 10 + 2 = 12. *Ubi vero restat nihil corpus primum quiescet. Ubi residuum est minus nihilo, sive quantitas negativa corpus primum regredietur, & motus secundi subtractione obtinebitur.* Pag. 304. Lin. 8. *Leg. Ut* 1 *ad* 8. *circiter Lin.* 9. *Leg. ut* 9 *ad* 8. *circiter.* Pag. 351. Lin. 12, 13. *Leg. Numerorum pro ipsis distantiis, unitate pro distantia minima ubique accepta. licet unitas ista sit valoris; diversi, pro diversis distantiis periheliis in priori Elementorum Tabula distincte per Logarithmos consignatis.*

Catalogus Librorum Impensis Benj. Took.

ARITHMETICA UNIVERSALIS sive de Compositione & Resolutione Arithmetica Liber. Cui accessit Halleiana Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus. In Usum Juventutis Academicæ.

PRÆLECTIONES ASTRONOMICÆ Cantabrigiæ in Scholis Publicis Habitæ à GULIELMO WHISTON, A.M. & Matheseωs Professore Lucasiano. Quibus Accedunt Tabulæ Plurimæ Astronomicæ Flamstedianæ Correctæ, Halleianæ, Cassinianæ, & Streetianæ. In Usum Juventutis Academicæ.

TELLURIS *Theoria Sacra:* Orbis Nostri Originem & Mutationes Generales, quas aut jam subiit, aut olim subiturus est, Complectens. Libri duo Priores de Diluvio & Paradiso. Editio Tertia, recognita & contracta. Authore T. BURNETIO.

A NEW *Theory of the Earth*, from its Original, to the Consumation of all Things: Wherein the Creation of the World in Six Days, the Universal Deluge, and the General Conflagration, *as laid down in the Holy Scriptures*, are shewn to be perfectly agreeable to Reason and Philosophy. With a large Introductory Discourse concerning the Genuine Nature, Stile, and Extent of the *Mosaick* History of the Creation. The *Second Edition*, with great Additions, Improvements and Corrections. By WILLIAM WHISTON, M.A. Professor of the *Mathematicks* in the University of *Cambridge*.

k.

e de
iber.
ame-
Aca-

anta-
M O
Lu-
ono-
anæ,

rigi-
, aut
es de
con-

al, to
reati-
luge,
Ho-
e to
ctory
and
The
nents
M. A.
y of